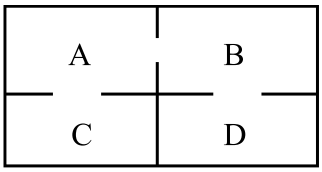
POSIBLE SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA DE SISTEMAS DE JUNIO DE 2003.

Problema 1 (3,5 puntos):

En una investigación con ratones, se usa un "laberinto" con cuatro celdas A, B, C y D, según se muestra en la figura. En cada minuto, un ratón puede permanecer en la misma celda en la que estaba en el minuto anterior con una probabilidad del 50%, o bien puede moverse a una de las celdas que se comunican con aquella en la que estaba. Si sólo hay una celda adyacente, la probabilidad de ir a ella será del 50%, mientras que si hay dos celdas adyacentes, cada una de ellas tendrá una probabilidad del 25%.

a) Halle la matriz de transición de la cadena de Markov que modela este sistema.
b) Si un ratón se encuentra en un momento dado en la celda B, ¿cuál es la probabilidad de que dos minutos después se encuentre en la celda D?
c) Si dejamos un ratón durante un tiempo muy largo en el laberinto, ¿qué probabilidad habrá de encontrarlo en cada una de las celdas?



Solución:

Apartado a):

El conjunto de estados será S={A,B,C,D}. La matriz de transición será:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Apartado b):

Según las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se trata de calcular uno de los elementos de Q^2:

$$q_{24}^{(2)} = 0,25 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,25$$

Apartado c):

Como la cadena de Markov es finita y ergódica, podemos afirmar que existe la distribución estacionaria, que es precisamente lo que nos piden. Para calcularla, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \\ p_D \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \\ p_D \end{pmatrix}$$

$$p_A + p_B + p_C + p_D = 1$$

El sistema puede resolverse, por ejemplo, fijando p_A=1 y normalizando luego. La solución final es:

$$p_A = \frac{1}{3}, \quad p_B = \frac{1}{3}, \quad p_C = \frac{1}{6}, \quad p_D = \frac{1}{6}.$$

Ésta es la distribución de probabilidad de la localización del ratón, a la larga.

Problema 2 (3,25 puntos):

Un ambulatorio dispone de una sala de espera, cuya capacidad podemos suponer ilimitada. Hay dos médicos, ambos igualmente capacitados, cada uno de los cuales atiende a un paciente en un tiempo que se distribuye exponencialmente con media de 10 minutos. Los pacientes llegan al ambulatorio con un tiempo entre llegadas que se distribuye exponencialmente, con media de 6 minutos. Halle:

a) La probabilidad de que alguno de los dos médicos esté desocupado.
b) El tiempo medio que un paciente tiene que esperar en la sala, antes de ser atendido.
c) El número medio de pacientes que hay esperando en la sala (no se cuentan los que ya están siendo atendidos).

Solución:

El sistema se puede modelar como una cola M/M/2, con $1/\lambda$=6 minutos, $1/\mu$=10 minutos, con lo cual λ=10 clientes/hora, μ=6 clientes/hora, $\rho=\lambda/(2\mu)$=5/6.

Apartado a):

Nos piden la probabilidad de que haya 0 clientes en el sistema o bien 1 cliente en el sistema (son las circunstancias bajo las cuales hay algún médico desocupado). Es decir, tenemos que calcular p_0+p_1. Para ello, lo primero que tenemos que hacer es hallar p_0:

$$p_0 = \left(\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1} = \left(\frac{2^2 \rho^2}{2!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{1} \frac{(2\rho)^n}{n!} \right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{2^2 \rho^2}{2!(1-\rho)} + \frac{(2\rho)^0}{0!} + \frac{(2\rho)^1}{1!} \right)^{-1} = \left(\frac{4\rho^2}{2(1-\rho)} + 1 + 2\rho \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{4\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2\frac{1}{6}} + 1 + 2\frac{5}{6} \right)^{-1} = \left(\frac{6 \cdot 4 \cdot 5^2}{2 \cdot 6^2} + 1 + \frac{10}{6} \right)^{-1} = \left(\frac{50}{6} + 1 + \frac{10}{6} \right)^{-1} = \left(\frac{66}{6} \right)^{-1} = \frac{1}{11}$$

A continuación hallamos p_1:

$$p_1 = \frac{(2\rho)^1}{1!} p_0 = 2 \ \frac{5}{6} \ \frac{1}{11} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

Y por último, la probabilidad de que algún médico esté desocupado:

P(“Algún médico está desocupado”)= $p_0 + p_1 = \frac{1}{11} + \frac{5}{33} = \frac{8}{33} \approx 0{,}242424$

Apartado b):

Nos piden el tiempo de espera en la cola, W_q. Si uso las fórmulas del formulario del examen, necesito hallar antes L_q:

$$L_q = \frac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2} = \frac{2^2 \rho^3 p_0}{2!(1-\rho)^2} =$$

$$= \frac{4\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{11}}{2\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{4 \cdot 5^3 \cdot 6^2}{2 \cdot 6^3 \cdot 11} =$$

$$= \frac{5^3}{3 \cdot 11} = \frac{125}{33} \text{ pacientes} \approx 3{,}7878 \text{ pacientes}$$

Ahora ya puedo hallar W_q mediante el teorema de Little:

$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{125}{10 \cdot 33} = \frac{25}{66} \text{ horas} \approx 0{,}37878 \text{ horas} \approx 22{,}7272 \text{ minutos}$$

Apartado c):

Nos piden el número medio de clientes en la cola, L_q, que ya habíamos hallado como resultado auxiliar en el apartado anterior:

$$L_q = \frac{125}{33} \text{ pacientes} \approx 3{,}7878 \text{ pacientes}$$

Problema 3 (1,75 puntos):

Sea el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $15x_1 + 10x_2$

Sujeto a: $2x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1 + 3x_2 \geq 11$

$x_1, x_2 \geq 0$

Resuelva dicho problema mediante el método del Simplex, siguiendo estos pasos:

a) Construya una solución factible inicial (tabla inicial del método).
b) Obtenga la(s) solución(es) óptima(s), si las hay.
c) ¿De qué tipo es la(s) solución(es) óptima(s) obtenida(s), si las hay?

Solución:

Apartado a):

Pasando a forma estándar queda:

Maximizar	$15x_1 + 10x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + x_2 + x_3 = 12$
	$x_1 + 3x_2 - x_4 = 11$
	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Observamos que no podemos conseguir la matriz identidad para construir la tabla inicial, por lo que pasamos al método de las dos fases, añadiendo la variable artificial x_5:

Maximizar	$-x_5$
Sujeto a:	$2x_1 + x_2 + x_3 = 12$
	$x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 11$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

La Fase I se desarrolla como sigue:

			0	0	0	0	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_3	0	12	2	1	1	0	0
P_5	–1	11	1	3	0	–1	1
		–11	–1	–3	0	1	0

Criterio de entrada: mín{–1,–3} = –3, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín{12/1, 11/3}=11/3, luego sale x_5.

			0	0	0	0	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_3	0	25/3	5/3	0	1	1/3	–1/3
P_2	0	11/3	1/3	1	0	–1/3	1/3
		0	0	0	0	0	1

La tabla anterior es una de las tablas óptimas para la fase I (habría otras dos más, correspondientes a introducir en la base x_1 y x_4, respectivamente). Utilizamos esta tabla para construir la primera tabla de la fase II:

			15	10	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$
P_3	0	25/3	5/3	0	1	1/3
P_2	10	11/3	1/3	1	0	–1/3
		110/3	–35/3	0	0	–10/3

Apartado b):

Continuamos con la fase II del método de las dos fases, partiendo de la tabla inicial de dicha fase que construimos en el apartado anterior:

Criterio de entrada: mín{–35/3,–10/3} = –35/3, luego entra x_1.
Criterio de salida: mín{25/5, 11/1}=25/5, luego sale x_3.

			15	10	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$
P_1	15	5	1	0	3/5	1/5
P_2	10	2	0	1	–1/5	–2/5
		95	0	0	7	–1

Criterio de entrada: mín{–1} = –1, luego entra x_4.
Criterio de salida: mín{25}=25/5, luego sale x_1.

			15	10	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$
P_4	0	25	5	0	3	1
P_2	10	12	2	1	1	0
		120	5	0	10	0

Esta tabla es óptima, y corresponde a la solución (0,12,0,25). Esto quiere decir que los valores óptimos de las variables del problema original son: x_1=0, x_2=12, y que el valor óptimo de la función objetivo es 120.

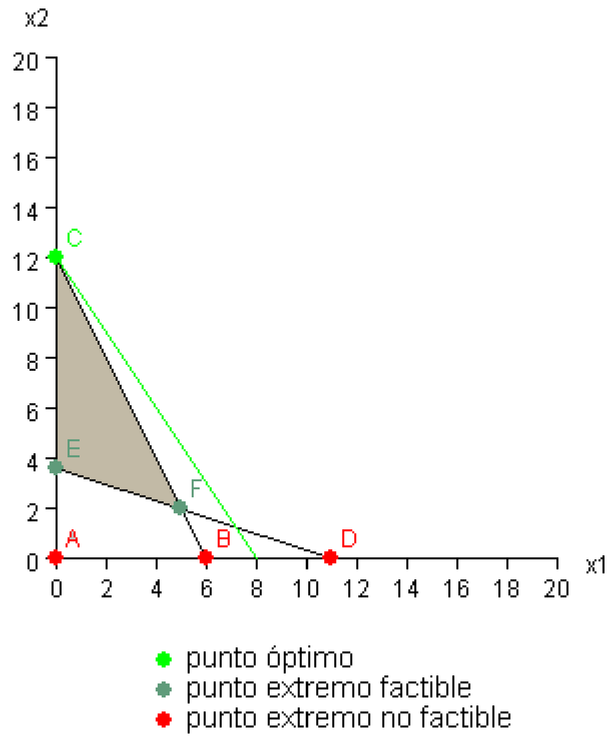
Apartado c):

La solución óptima indicada en el apartado anterior es única, ya que la tabla óptima no hay variables no básicas que tengan un cero en la última fila.

Aunque no se pide, a continuación incluimos la solución por el método gráfico de este problema (puntos de corte y representación gráfica):

Soluciones para los puntos extremos

Punto	x1	x2	S1	S2	Z
A	0.0	0.0	12.0	-11.0	0.0
B	6.0	0.0	0.0	-5.0	90.0
C	0.0	12.0	0.0	25.0	120.0
D	11.0	0.0	-10.0	0.0	165.0
E	0.0	3.7	8.3	0.0	36.7
F	5.0	2.0	0.0	0.0	95.0



Problema 4 (1,5 puntos):

Una empresa de seguridad necesita tener cada día de la semana al menos el siguiente número de empleados:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Empleados	16	15	16	19	14	12	18

Sabiendo que cada empleado hará su semana laboral trabajando 5 días consecutivos comenzando cuando la empresa le diga y que cada contrato supone un costo de 500 €/semana, ¿cuántos empleados deberá contratar y qué días deberá trabajar cada uno con el objetivo de minimizar los costos de contratación?

Plantee un problema de programación lineal que modele esta situación. ***No intente obtener la solución, sólo debe dar el planteamiento.***

Solución:

Variables de decisión:
x_1 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el lunes
x_2 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el martes
x_3 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el miércoles
x_4 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el jueves
x_5 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el viernes
x_6 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el sábado
x_7 = número de trabajadores que empiezan a trabajar el domingo

Función objetivo (costes de contratación, expresados en euros):
Minimizar $500x_1+500x_2+500x_3+500x_4+500x_5+500x_6+500x_7$

Restricciones:

$$
\begin{array}{llllllllll}
x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 16 & \text{(lunes)} \\
x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 15 & \text{(martes)} \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq & 16 & \text{(miércoles)} \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq & 19 & \text{(jueves)} \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq & 14 & \text{(viernes)} \\
 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq & 12 & \text{(sábado)} \\
 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 18 & \text{(domingo)}
\end{array}
$$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5, x_6 , x_7 \geq 0$ (no negatividad)

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5, x_6 , x_7 \in \mathbf{Z}$ (el número de trabajadores contratados ha de ser entero)

Dado que las variables de decisión sólo pueden tomar valores enteros, este problema se resolvería utilizando métodos de programación lineal entera, que no hemos visto.