POSIBLE SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA DE SISTEMAS DE SEPTIEMBRE DE 2002.

Problema 1 (3,5 puntos):

Un agricultor tiene posee 100 hectáreas para cultivar trigo y alpiste. El costo de la semilla de trigo es de 4€ por hectárea y la semilla de alpiste tiene un costo de 6€ por hectárea. El costo total de la mano de obra es de 20€ y 10€ por hectárea respectivamente. El ingreso esperado es de 110€ por hectárea de trigo y 150€ por hectárea de alpiste. Si no se desea gastar más de 480€ en semillas ni más de 1500€ en mano de obra, ¿cuántas hectáreas de cada uno de los cultivos debe plantarse para obtener la máxima ganancia?

a) Resolver este problema mediante el método Simplex.
b) Resolver este problema mediante el método gráfico.

Solución:

Apartado a):

x_1 = nº de hectáreas de trigo que se siembran
x_2 = nº de hectáreas de alpiste que se siembran

Restricciones:

$4 x_1 + 6 x_2 \leq 480$
$20 x_1 + 10 x_2 \leq 1500$
$x_1 + x_2 \leq 100$
$x_1, x_2 \geq 0$

Función objetivo que maximizar:

$110 x_1 + 150 x_2$

Pasando a forma estándar queda:

Maximizar $110 x_1 + 150 x_2$

Sujeto a:

$4x_1 + 6x_2 + x_3 = 480$
$20x_1 + 10x_2 + x_4 = 1500$
$x_1 + x_2 + x_5 = 100$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

El método se desarrolla como sigue:

			110	150	0	0	0
Base	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	480	4	6	1	0	0
P_4	0	1500	20	10	0	1	0
P_5	0	100	1	1	0	0	1
		0	–110	–150	0	0	0

Criterio de entrada: mín{–110,–150} = –150, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín{480/6, 1500/10, 100/1}=80, luego sale x_3.

			110	150	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_2	150	80	2/3	1	1/6	0	0
P_4	0	700	40/3	0	–10/6	1	0
P_5	0	20	1/3	0	–1/6	0	1
		12000	–10	0	25	0	0

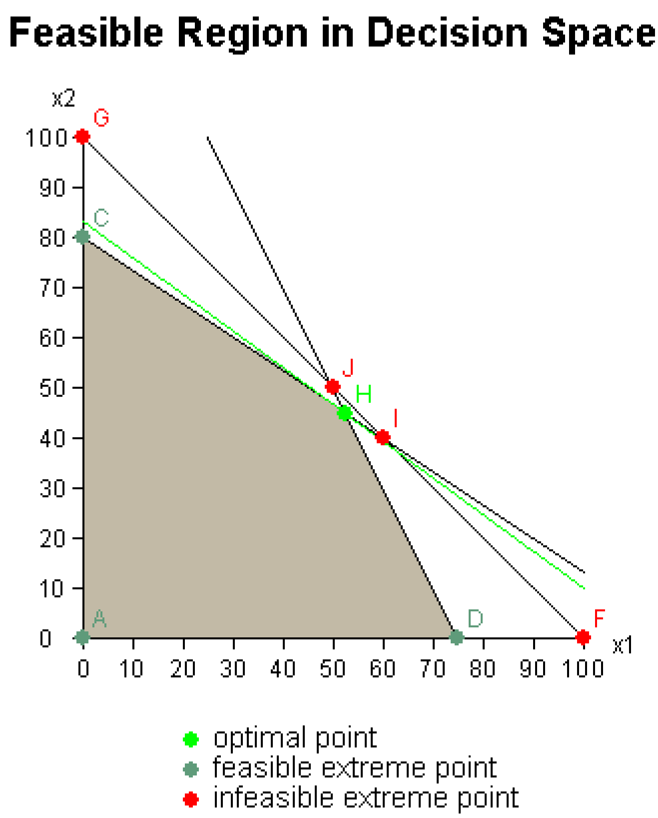
Criterio de entrada: mín{–10} = –10, luego entra x_1.
Criterio de salida: mín{80·3/2, 700·3/40, 20·3}=105/2, luego sale x_4.

			110	150	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_2	150	45	0	1	1/4	–1/20	0
P_1	110	105/2	1	0	–1/8	3/40	0
P_5	0	5/2	0	0	–3/24	–1/40	1
		12525	0	0	95/4	3/4	0

Esta tabla es óptima, y hay solución única, que es (105/2,45,0,0,5/2). Esto quiere decir que hay que sembrar 105/2 hectáreas de trigo y 45 de alpiste. Por lo tanto, quedan 5/2 hectáreas sin sembrar. La ganancia obtenida será de 12525€.

Apartado b):

Usando las mismas definiciones de las variables del apartado anterior, el dibujo debería quedar como sigue. La zona sombreada es la región factible.



Los puntos de corte entre las diferentes rectas tienen las coordenadas (x1,x2) que se especifican en la siguiente tabla (en la columna “Z” están los valores de la función objetivo):

Solutions for All Extreme Points

Point	x1	x2	S1	S2	S3	Z
A	0.0	0.0	480.0	1500.0	100.0	0.0
B	120.0	0.0	0.0	-900.0	-20.0	13200.0
C	0.0	80.0	0.0	700.0	20.0	12000.0
D	75.0	0.0	180.0	0.0	25.0	8250.0
E	0.0	150.0	-420.0	0.0	-50.0	22500.0
F	100.0	0.0	80.0	-500.0	0.0	11000.0
G	0.0	100.0	-120.0	500.0	0.0	15000.0
H	52.5	45.0	0.0	0.0	2.5	12525.0
I	60.0	40.0	0.0	-100.0	0.0	12600.0
J	50.0	50.0	-20.0	0.0	0.0	13000.0

Problema 2 (3,25 puntos):

Se analiza un sistema de lavado automático de vehículos para ver si se pueden reducir los costos. Los clientes llegan según un proceso de Poisson con tasa media de 10 vehículos por hora y sólo se puede lavar un coche a la vez. El tiempo requerido para lavar un vehículo, con la máquina actual, es exponencial con tasa media de 4 min.

La empresa sabe que cada hora que una máquina cualquiera está funcionando (luz, agua, atención de un empleado,...) le cuesta 0,75 euros.

La máquina actual se está pagando mediante un préstamo por el que la empresa paga 1 euro por hora. Si la empresa se cambiara a otra máquina mejor, pasaría a pagar 1,25 euros por hora, y la máquina tardaría en lavar un coche 3 min.

¿Qué decisión debería tomar dicha empresa?

Solución:

En ambos casos tenemos una cola M/M/1. El coste total de la empresa vendrá dado por la suma del coste por el préstamo (que es una cantidad fija a la hora), más el coste de funcionamiento (que depende de la proporción de tiempo que la máquina esté funcionando). La decisión debe ser elegir la alternativa que tenga el menor coste total.

Situación actual:

λ_1=10 vehículos/hora, μ_1=15 vehículos/hora, ρ_1=0,666

Costes totales por hora = $\rho_1 \cdot 0{,}75€ + 1€ = 1{,}5€$

Situación alternativa:

λ_2=10 vehículos/hora, μ_2=20 vehículos/hora, ρ_2=0,5

Costes totales por hora = $\rho_2 \cdot 0{,}75€ + 1{,}25€ = 1{,}625€$

Como la situación actual tiene menor coste, es la mejor.

Problema 3 (3,25 puntos):

El Servicio Hidrológico de la Comunidad Autónoma de X planea construir un embalse para regular la cuenca de uno de sus ríos con el objetivo de satisfacer los requerimientos de agua para regadío. La capacidad máxima del embalse previsto será de 4.000.000 m^3, o, de manera abreviada 4 unidades de agua (1 unidad de agua = 1.000.000 m^3).

Antes de proceder a la construcción el Servicio desearía tener alguna idea sobre la efectividad del mismo a largo plazo. Para ello se ha llevado a cabo un estudio sobre los volúmenes semanales de agua aportados por el río, encontrándose con que pueden aproximarse por medio de la siguiente distribución de probabilidad discreta:

Aportación semanal en unidades de agua	2	3	4	5
Probabilidad	0,3	0,4	0,2	0,1

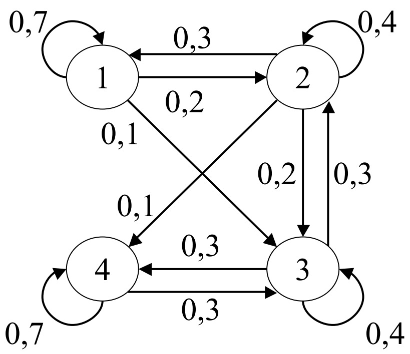
El Servicio está considerando la posibilidad de contratos de regadío que requerirán el consumo de 2 unidades de agua por semana, pero adicionalmente, para mantener los estándares de calidad del agua para otros usos, deberá dejar salir al menos 1 unidad de agua por semana. Por lo tanto el objetivo semanal será dejar salir 3 unidades de agua. El nivel mínimo admitido del embalse (estado mínimo) no podrá ser inferior a una unidad de agua. Si el estado del embalse (nivel del embalse) más la aportación de agua del río no es suficiente como para dejar salir 3 unidades de agua sin que bajemos del nivel mínimo, se tendrá que dejar salir menos agua, afectando la carencia a los regadíos. Si el embalse está lleno, cualquier exceso será vertido por los aliviaderos.

a) Representar el diagrama de transiciones y encontrar la matriz de probabilidades de transición.
b) A la larga, ¿qué distribución de probabilidad tiene el estado del embalse?
c) Suponiendo que la primera semana partimos de una situación en la que se embalsaban 3 unidades de agua ¿Cuál es la probabilidad de que dos semanas después se encuentre al mínimo?

Solución:

Apartado a):

Tendremos un estado para cada posible nivel del embalse, esto es, S = {1, 2, 3, 4}. El DTE será:



La matriz de probabilidades de transición correspondiente es:

$$Q=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Apartado b):

Como la cadena de Markov es finita y ergódica, podemos afirmar que existe la distribución estacionaria, que es precisamente lo que nos piden. Para calcularla, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

El sistema puede resolverse, por ejemplo, fijando p_1=1 y normalizando luego. La solución final es:

$$p_1 = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{4}{15}, \quad p_4 = \frac{1}{3}.$$

Ésta es la distribución de probabilidad del estado del embalse, a la larga.

Apartado c):

Según las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se trata de calcular uno de los elementos de Q^2:

$$q_{31}^{(2)} = 0 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0 = 0,09$$