**POSIBLE SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA DE SISTEMAS DE SEPTIEMBRE DE 2003.**

**Problema 1 (3,25 puntos):**

Se usa una máquina para producir herramientas de precisión. Si la máquina está hoy en buenas condiciones, entonces estará bien mañana con 90% de probabilidad. Si la máquina está en mal estado hoy, entonces estará en mal estado mañana con 80% de probabilidad. Si la máquina está en buen estado, produce 100 herramientas por día, y si está en mal estado, 60 herramientas por día. En promedio, ¿cuántas herramientas por día se producen?

**Solución:**

Podemos modelar esta situación mediante una cadena de Markov. El conjunto de estados será S={BIEN,MAL}. La matriz de transición será:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Como esta cadena de Markov es finita y ergódica, podemos afirmar que existe la distribución estacionaria. Debemos hallar dicha distribución estacionaria, ya que nos dirá qué probabilidad hay de encontrarse en cada estado (a la larga). Para ello, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_{BIEN} \\ p_{MAL} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} p_{BIEN} \\ p_{MAL} \end{pmatrix}$$

$$p_{BIEN} + p_{MAL} = 1$$

El sistema puede resolverse, por ejemplo, fijando $p_{BIEN}$=1 y normalizando luego. La solución final es:

$$p_{BIEN} = \frac{2}{3}, \quad p_{MAL} = \frac{1}{3}.$$

El promedio de herramientas fabricadas al día, que es lo que nos piden, dependerá de la proporción de días “buenos” y “malos”:

$$\frac{2}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot 60 = \frac{260}{3} = 86{,}666 \; herramientas / día$$

**Problema 2 (3,5 puntos):**

En una red de ordenadores hay una impresora compartida. Los trabajos llegan con una tasa media de 2 trabajos por minuto, siguiendo un proceso de Poisson. La impresora imprime 10 páginas por minuto y el número medio de páginas por trabajo son 4. Entre un trabajo y el siguiente la impresora tarda 3 segundos de latencia. El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial. Calcular:

a) Porcentaje del tiempo que la impresora está libre.
b) Longitud media de la cola.

c) Tasa de servicio que sería necesaria para que el tiempo medio en el sistema fuera inferior a 3 minutos.

**Solución:**

El sistema se puede modelar como una cola M/M/1. El tiempo medio entre llegadas es $1/\lambda=0{,}5$ minutos. Como cada trabajo tiene una media de 4 páginas, la impresora tardará una media de 4/10 minutos en imprimirlo, a lo que debemos sumar los 3 segundos=1/20 minutos que tiene de latencia en cada trabajo. Por lo tanto $1/\mu=4/10+1/20=9/20$ minutos. En tal caso, $\lambda=2$ trabajos/minuto, $\mu=20/9$ trabajos/minuto, $\rho=\lambda/\mu=18/20=9/10$.

*Apartado a):*

Nos piden la probabilidad de que haya 0 clientes en el sistema:

$$p_0 = 1-\rho = 1-\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Es decir, la impresora está libre durante el 10% del tiempo.

*Apartado b):*

Nos piden $L_q$:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{1-\frac{9}{10}} = \frac{9^2}{10^2\cdot\frac{1}{10}} = \frac{9^2}{10} = \frac{81}{10}\text{ trabajos} = 8{,}1\text{ trabajos}$$

*Apartado c):*

Dejando constante $\lambda=2$, nos piden hallar el valor de $\mu$ para que $W<3$ minutos. Comenzamos expresando $W$ en función de $\lambda$ y $\mu$, haciendo uso de las fórmulas que aparecen en el enunciado del examen (véanse al final de este documento):

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \dots$$

$$\dots = \frac{\lambda^2}{\mu^2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu^2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu^2\frac{\mu-\lambda}{\mu}} + \frac{1}{\mu} = \dots$$

$$\dots = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\mu}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Planteamos la inecuación:

$$W < 3 \Rightarrow \frac{1}{\mu - \lambda} < 3 \Rightarrow ...$$

Sustituimos el valor de $\lambda$ y resolvemos la inecuación:

$$... \Rightarrow \frac{1}{\mu - 2} < 3 \Rightarrow 1 < 3(\mu - 2) \Rightarrow 3\mu - 6 > 1 \Rightarrow 3\mu - 7 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu > \frac{7}{3} = 2{,}333 \text{ trabajos/minuto}$$

Es decir, se necesita una tasa de servicios $\mu$ mayor que 2,333 trabajos/minuto para que el tiempo de espera en el sistema caiga por debajo de los 3 minutos.

**Problema 3 (1,75 puntos):**

Sea el siguiente problema de programación lineal:

*Maximizar* $8x_1 + 4x_2$

*Sujeto a:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ x_1 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva dicho problema mediante el método del Simplex, siguiendo estos pasos:

a) Construya una solución factible inicial (tabla inicial del método).
b) Obtenga la(s) solución(es) óptima(s), si las hay.
c) ¿De qué tipo es la(s) solución(es) óptima(s) obtenida(s), si las hay?

**Solución:**

*Apartado a):*

Pasando a forma estándar queda:

*Maximizar* $8x_1 + 4x_2$

*Sujeto a:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 &= 32 \\ x_1 + x_5 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tabla inicial será:

| | | | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | **$c_B$** | **$P_0$** | **$P_1$** | **$P_2$** | **$P_3$** | **$P_4$** | **$P_5$** |
| $P_3$ | 0 | 40 | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| $P_4$ | 0 | 32 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $P_5$ | 0 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 0 | –8 | –4 | 0 | 0 | 0 |

*Apartado b):*

Aplicamos el resto del método, partiendo de la tabla inicial que construimos en el apartado anterior:

Criterio de entrada: mín{–8,–4} = –8, luego entra $x_1$.
Criterio de salida: mín{40/2, 32/4, 6/1}=6/1, luego sale $x_5$.

| | | | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | **$c_B$** | **$P_0$** | **$P_1$** | **$P_2$** | **$P_3$** | **$P_4$** | **$P_5$** |
| $P_3$ | 0 | 28 | 0 | 4 | 1 | 0 | –2 |
| $P_4$ | 0 | 8 | 0 | 2 | 0 | 1 | –4 |
| $P_1$ | 8 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 48 | 0 | –4 | 0 | 0 | 8 |

Criterio de entrada: mín{–4} = –4, luego entra $x_2$.
Criterio de salida: mín{28/4, 8/2}=8/2, luego sale $x_4$.

| | | | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | **$c_B$** | **$P_0$** | **$P_1$** | **$P_2$** | **$P_3$** | **$P_4$** | **$P_5$** |
| $P_3$ | 0 | 12 | 0 | 0 | 1 | –2 | 6 |
| $P_2$ | 4 | 4 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | –2 |
| $P_1$ | 8 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 64 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |

Esta tabla es óptima, y corresponde a la solución (6,4,12,0,0). Esto quiere decir que los valores óptimos de las variables del problema original son: $x_1$=6, $x_2$=4, y que el valor óptimo de la función objetivo es 64.

Esta solución óptima no es única, ya que en la tabla óptima hay una variable no básica (la $x_5$) que tiene un cero en la última fila. Por lo tanto, existe otra tabla óptima, que obtenemos metiendo la variable no básica que tenía el cero.

Criterio de salida: mín{12/6, 6/1}=12/6, luego sale $x_3$.

| | | | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Base** | **$c_B$** | **$P_0$** | **$P_1$** | **$P_2$** | **$P_3$** | **$P_4$** | **$P_5$** |
| $P_5$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1/6 | –1/3 | 1 |
| $P_2$ | 4 | 8 | 0 | 1 | 1/3 | –1/6 | 0 |
| $P_1$ | 8 | 4 | 1 | 0 | –1/6 | 1/3 | 0 |
| | | 64 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |

Esta segunda tabla óptima, corresponde a la solución (4,8,0,0,2). Esto quiere decir que los valores óptimos de las variables del problema original son: $x_1$=4, $x_2$=8. El valor óptimo de la función objetivo es, como ya sabíamos, 64.

Como tenemos más de una tabla óptima, el problema tiene infinitas soluciones óptimas, que vienen dadas por:

$$\lambda_1(6,4,12,0,0)+\lambda_2(4,8,0,0,2), \text{ donde } \lambda_1,\lambda_2 \in [0,1], \lambda_1+\lambda_2=1$$

*Apartado c):*

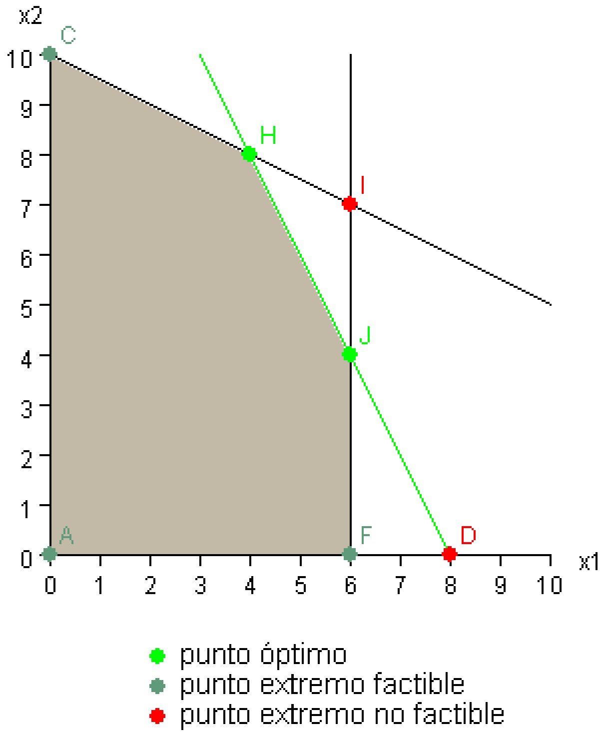
Como dijimos en el apartado anterior, se han encontrado infinitas soluciones óptimas, dado que hay más de una tabla óptima.

Aunque no se pide, a continuación incluimos la solución por el método gráfico de este problema (puntos de corte y representación gráfica):

## Soluciones para los puntos extremos

| Punto | x1 | x2 | S1 | S2 | S3 | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0.0 | 0.0 | 40.0 | 32.0 | 6.0 | 0.0 |
| B | 20.0 | 0.0 | 0.0 | -48.0 | -14.0 | 160.0 |
| C | 0.0 | 10.0 | 0.0 | 12.0 | 6.0 | 40.0 |
| D | 8.0 | 0.0 | 24.0 | 0.0 | -2.0 | 64.0 |
| E | 0.0 | 16.0 | -24.0 | 0.0 | 6.0 | 64.0 |
| F | 6.0 | 0.0 | 28.0 | 8.0 | 0.0 | 48.0 |
| G | 6.0 | inf | -inf | -inf | 0.0 | inf |
| H | 4.0 | 8.0 | 0.0 | 0.0 | 2.0 | 64.0 |
| I | 6.0 | 7.0 | 0.0 | -6.0 | 0.0 | 76.0 |
| J | 6.0 | 4.0 | 12.0 | 0.0 | 0.0 | 64.0 |

## Región factible



**Problema 4 (1,5 puntos):**

Una empresa tiene que realizar 7 tareas ligadas por relaciones de precedencia, es decir, para comenzar a realizar algunas tareas se necesita haber acabado otras. En la tabla 1 se recogen las tareas precedentes para cada tarea, la duración de las tareas en días, y los costes de demora de cada tarea por cada día que se demore el inicio de la misma. Se trata de determinar el tiempo de inicio (día) de cada tarea de manera que el coste total de demora sea mínimo. Las tareas comienzan al principio de cada día y la tarea con la que se que comience el primer día comenzará en el instante cero (no tiene demora).

| TAREAS | DURACIÓN | TAREAS PRECEDENTES | COSTES DE DEMORA |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | Ninguna | 0 |
| 2 | 7 | 1 | 3 |
| 3 | 8 | 1 | 7 |
| 4 | 3 | 2 | 8 |
| 5 | 4 | 2 y 4 | 5 |
| 6 | 10 | 1 y 3 | 4 |
| 7 | 6 | 3 y 5 | 3 |

Tabla 1. Datos para la secuencia de tareas

Plantee un problema de programación lineal que modele esta situación. ***No intente obtener la solución, sólo debe dar el planteamiento.***

**Solución:**

En cada ocasión en que una tarea T debe acabar antes de que empiece una tarea Q, se debe cumplir la restricción lineal $x_Q - x_T \geq d_T$, donde $x_T$ es el instante de inicio de la tarea T, $x_Q$ es el instante de inicio de la tarea Q, y $d_T$ es la duración de la tarea T. Como la tarea 1 empieza en el instante cero, añadiremos la restricción lineal $x_1=0$. Siguiendo este esquema, podemos plantear el problema como sigue:

*Minimizar* $0x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 3x_7$

*Sujeto a:* $x_1 = 0$

$x_2 - x_1 \geq 10$

$x_3 - x_1 \geq 10$

$x_4 - x_2 \geq 7$

$x_5 - x_2 \geq 7$

$x_5 - x_4 \geq 3$

$x_6 - x_1 \geq 10$

$x_6 - x_3 \geq 8$

$x_7 - x_3 \geq 8$

$x_7 - x_5 \geq 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

**FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS:**

**M/M/1:** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \rho^n(1-\rho)$; $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$; $W(t) = e^{-t/W}$

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$

**M/M/c:** $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$; $p_0 = \left(\dfrac{c^c\rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1}\dfrac{(c\rho)^n}{n!}\right)^{-1}$; $L_q = \dfrac{c^c\rho^{c+1}p_0}{c!(1-\rho)^2}$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!}p_0, \text{ si } n = 0,1,\ldots,c \\ \dfrac{c^c\rho^n}{c!}p_0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

**M/M/1 y M/M/c:** $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda W_q$; $L = \lambda W$

**M/M/1/k:** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$ $\lambda_{ef} = \lambda(1-p_k)$

$W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda_{ef}W_q$; $L = \lambda_{ef}W$; $L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$