Solución del examen de Investigación Operativa de Sistemas de septiembre de 2004

Problema 1 (3,5 puntos):

Una marca de cereales para el desayuno incluye un muñeco de regalo en cada caja de cereales. Hay tres tipos distintos de muñecos, y cada tipo de muñeco tiene la misma probabilidad de aparecer en una caja. Deseamos conseguir una colección completa, es decir, un muñeco de cada tipo. Halle:

a) El diagrama de transición de estados y la matriz de transición de una cadena de Markov que modele esta situación. **Ayuda:** la cadena de Markov es **absorbente**.
b) El número medio de cajas de cereales que hay que comprar para conseguir una colección completa.

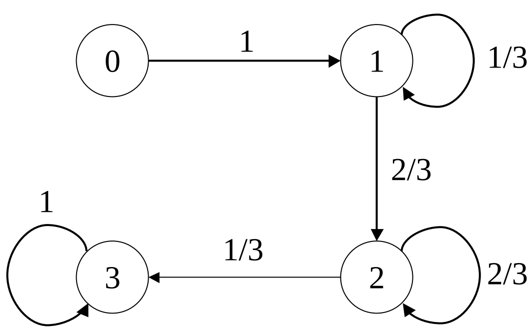
Solución:

Apartado a):

Supongamos que los tipos de muñecos son A, B y C. Tenemos una probabilidad 1/3 de encontrarnos con cualquiera de los tipos al abrir una caja de cereales. Por lo tanto, la situación en la que ya han salido muñecos de los tipos A y B es análoga a la situación en la que ya han salido de los tipos B y C, por ejemplo. Dicho de otra manera, lo que importa es la cantidad de tipos de muñecos que ya tenemos, y no los tipos concretos de los que se trate. Podemos modelar esta situación mediante una cadena de Markov en la que el conjunto de estados sea S={0, 1, 2, 3}, donde el número indica la cantidad de tipos de muñecos que ya tenemos. Por lo tanto empezaremos en el estado 0, y habremos logrado la colección completa cuando lleguemos al estado 3. La matriz de transición será:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El diagrama de transición de estados (DTE) correspondiente es el que sigue:



Apartado b):

Las submatrices que obtenemos al descomponer Q son:

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Tendremos:

$$(I - Q')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sumamos los números medios de etapas que se estará en cualquier estado transitorio antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el 1^er^ estado transitorio, que representa la situación inicial en la que no tenemos muñecos de ningún tipo. Dichos números medios de etapas son los que forman la 1ª fila de $(I\text{-}Q')^{-1}$. El promedio será: 1+1,5+3=5,5 paquetes de cereales habrá que comprar como promedio antes de tener la colección completa.

Problema 2 (3,25 puntos):

En un Banco hay una sola caja. El cajero tarda un tiempo medio de quince minutos con cada cliente. Por razones de seguridad sólo se admiten dos clientes en el Banco: uno en caja y otro esperando. Los clientes que llegan cuando ya hay dos clientes en el Banco, se van. Los clientes llegan a un promedio de tres por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llegue se tenga que ir?

b) Habiendo encontrado el Banco lleno un día, lo intenta el día siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que de nuevo no pueda entrar?

Solución:

El sistema se puede modelar como una cola M/M/1/2. es decir, la capacidad del sistema es k = 2, con λ=3 clientes/hora, μ=4 clientes/hora, $\rho=\lambda/\mu$=3/4.

Apartado a):

Nos piden la probabilidad de que haya ya 2 clientes en el sistema.

$$p_2 = \frac{\rho^k(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}} = \frac{\rho^2(1-\rho)}{1-\rho^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1-3/4}{1-(3/4)^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1/4}{1-(3/4)^3} = \frac{9}{37} \approx 0{,}2432$$

Apartado b):

Tendremos los siguientes sucesos:

A_1=No hay sitio el primer día

A_2=No hay sitio el segundo día

La probabilidad que nos piden será:

$$P\left({}^{A_2}\!\!\diagup\!_{A_1} \right) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = p_2 = \frac{9}{37} \approx 0{,}2432$$

Para calcular P($A_1 \cap A_2$) hemos tenido en cuenta que lo que suceda un día es independiente de lo que suceda el siguiente, lo cual nos permite calcular la probabilidad de la intersección de sucesos como el producto de sus probabilidades.

Problema 3 (1,75 puntos):

Sea el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar $50x_1 + 100x_2$

Sujeto a:

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$
$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resuelva dicho problema mediante el método del Simplex, siguiendo estos pasos:

a) Construya una solución factible inicial (tabla inicial del método).
b) Obtenga la(s) solución(es) óptima(s), si las hay.
c) ¿De qué tipo es la(s) solución(es) óptima(s) obtenida(s), si las hay?

Solución:

Apartado a):

Pasando a forma estándar queda:

Maximizar $-50x_1 - 100x_2$

Sujeto a:

$$7x_1 + 2x_2 - x_3 = 28$$
$$2x_1 + 12x_2 - x_4 = 24$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Observamos que no podemos conseguir fácilmente una solución factible inicial, por lo que tenemos que aplicar el método de las dos fases. Para ello, añadimos dos variables artificiales, x_5 y x_6, con lo cual la tabla inicial del método será la siguiente:

			0	0	0	0	–1	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$	$\mathbf{P_6}$
P_5	–1	28	7	2	–1	0	1	0
P_6	–1	24	2	12	0	–1	0	1
		–52	–9	–14	1	1	0	0

Apartado b):

Aplicamos el resto del método, partiendo de la tabla inicial que construimos en el apartado anterior:

Fase I:

Criterio de entrada: mín{–9,–14} = –14, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín{28/2, 24/12}=24/12, luego sale x_6.

			0	0	0	0	–1	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$	$\mathbf{P_6}$
P_5	–1	24	20/3	0	–1	1/6	1	–1/6
P_2	0	2	1/6	1	0	–1/12	0	1/12
		–24	–20/3	0	1	–1/6	0	7/6

Criterio de entrada: mín{–20/3,–1/6} = –20/3, luego entra x_1.
Criterio de salida: mín{24·3/20, 2·6/1}=mín{18/5, 12}=18/5, luego sale x_5.

			0	0	0	0	–1	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$	$\mathbf{P_6}$
P_1	0	18/5	1	0	–3/20	1/40	1	–1/40
P_2	0	7/5	0	1	1/40	–7/80	0	7/80
		0	0	0	0	0	1	1

Hemos llegado al final de la Fase I, y observamos que han salido de la base todas las variables artificiales. Por lo tanto el problema original tenía solución y podemos pasar a la Fase II.

Fase II:

			–50	–100	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$
P_1	–50	18/5	1	0	–3/20	1/40
P_2	–100	7/5	0	1	1/40	–7/80
		–320	0	0	5	15/2

Al evaluar la condición de parada, observamos que se cumple. Por lo tanto, la tabla anterior se corresponde con una solución óptima del problema original. Dicha solución óptima es $\mathbf{x}_F = (18/5,7/5,0,0)^T$. El valor óptimo de la función objetivo original del enunciado, $F(x_1,x_2) = 50\, x_1 + 100\, x_2$, será 320, ya que la función objetivo que hemos usado en el método del simplex es su opuesta.

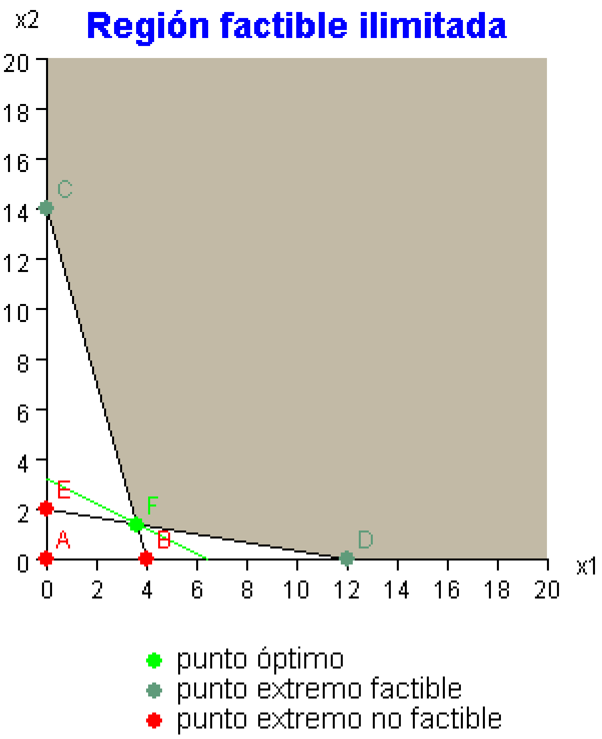
Apartado c):

En la tabla óptima de la Fase II no tenemos más ceros en la última fila que los de las variables de la base, con lo cual no existen más soluciones óptimas. Podemos decir entonces que la solución óptima $\mathbf{x}_F$ es única.
Aunque no se pide, a continuación incluimos la solución por el método gráfico de este problema (puntos de corte y representación gráfica). Nótese que la tabla de la Fase II se corresponde con un punto extremo en la gráfica, es decir, un vértice de la región factible, que es el punto F.

Soluciones para los puntos extremos

Punto	x1	x2	S1	S2	Z
A	0.0	0.0	-28.0	-24.0	0.0
B	4.0	0.0	0.0	-16.0	200.0
C	0.0	14.0	0.0	144.0	1400.0
D	12.0	0.0	56.0	0.0	600.0
E	0.0	2.0	-24.0	0.0	200.0
F	3.6	1.4	0.0	0.0	320.0

Región factible



Problema 4 (1,5 puntos):

En una fabrica de automóviles se fabrican dos modelos de coches: uno *urbano* (pequeño) y otro *todoterreno* (grande). Si se dedica sólo al montaje de vehículos urbanos consigue montar diariamente 60. Si se dedica a montar sólo vehículos *todoterreno* puede montar hasta 35 diariamente. En el módulo de pintura se pueden pintar hasta 70 vehículos urbanos diariamente si sólo se dedica a este modelo y puede pintar hasta 50 vehículos *todoterreno* si sólo se dedica a este tipo de vehículos.

En la fabricación de cada *todoterreno* consigue un beneficio de 6.000 euros mientras que el beneficio por la fabricación de cada vehículo urbano es de 3.000 euros. La empresa desea determinar el número de vehículos de cada modelo que tiene que fabricar diariamente para conseguir máximo beneficio.

Nota: No intente obtener la solución, sólo debe dar el planteamiento.

Solución:

Se definen las variables de decisión:

x_1 = Número de vehículos a fabricar del modelo *urbano*
x_2 = Número de vehículos a fabricar del modelo *todoterreno*

Se trata de maximizar el beneficio total de la fabricación diaria de automóviles, es decir, maximizar la expresión:

$$3.000x_1 + 6.000x_2$$

La primera restricción hace referencia a la limitación de la fabrica en su proceso de montaje. Cada vehículo urbano requiere para su montaje 1/60 días mientras que un todoterreno requiere 1/35 días. Por lo tanto, la suma del tiempo dedicado al montaje de cada modelo debe se ser igual o inferior a 1 día, es decir,

$$\frac{1}{60}x_1 + \frac{1}{35}x_2 \leq 1$$

La segunda restricción hace referencia a la limitación de la fabrica en su proceso de pintura. Cada vehículo urbano requiere en su proceso de printura 1/70 días mientras que un todoterreno requiere 1/50 días. Por lo tanto, la suma del tiempo dedicado al proceso de pintura de cada modelo debe se ser igual o inferior a un día, es decir,

$$\frac{1}{70}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$$

Por lo tanto, el modelo matemático para este problema de programación lineal viene expresado de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar} \quad 3.000x_1 + 6.000x_2$$

$$\text{sujeto a} \quad \frac{1}{60}x_1 + \frac{1}{35}x_2 \le 1$$

$$\frac{1}{70}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS:

M/M/1: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \rho^n (1-\rho)$; $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$; $W(t) = e^{-t/W}$

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$

M/M/c: $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$; $p_0 = \left(\dfrac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1}$; $L_q = \dfrac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2}$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \text{ si } n = 0,1,\dots,c \\ \dfrac{c^c \rho^n}{c!} p_0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c: $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda W_q$; $L = \lambda W$

M/M/1/k: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n (1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$ $\lambda_{ef} = \lambda(1-p_k)$

$W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda_{ef} W_q$; $L = \lambda_{ef} W$; $L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \ne 1 \\ \dfrac{k}{2}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$