



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación

Ciencia de la Computación e Ingeniería Artificial

PROYECTO FIN DE CARRERA

SIMULACIÓN VECTORIAL DE MODOS NORMALES EN FIBRAS DE CRISTAL FOTÓNICO

Autor: Francisco José Blanco Rodríguez

Director: Dr. Francisco R. Villatoro Machuca

Titulación: Ingeniero Industrial

MÁLAGA, julio de 2006

Agradecimientos

A mi madre, Isabel, esperando que se sienta orgullosa de su hijo. Gracias por todo lo que hiciste por mí.

A mi padre, Antonio, porque no hay un sólo momento en que no me acuerde de tí. Espero volver a verte de nuevo algún día.

A mi hermana, Lourdes, y mi sobrina, Aitana, por ser la alegría de la casa.

A mi niña, y, deseo, compañera de viaje en la vida, Inma, por el apoyo moral y el amor demostrado.

A mis compañeros, ellos saben quiénes son, por la ayuda prestada.

Y en definitiva, a todas aquellas personas (Tía Encarna no puedo olvidarme de tí) que de alguna u otra forma me permitieron el lujo de estudiar sin preocupación alguna.

Al Dr. Francisco R. Villatoro, sin lugar a dudas de los mejores docentes que jamás he tenido que, con su dirección y constante estímulo, ha conseguido que este proyecto llegara a su término.

Málaga
Julio de 2006

Francisco José Blanco Rodríguez

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	3
2. Fundamentos Teóricos	5
2.1. Introducción	5
2.2. Tipos de Fibras	5
2.3. Reflexión y Refracción en Fibras	6
2.4. Propagación de ondas electromagnéticas	7
3. Métodos numéricos	13
3.1. Introducción	13
3.2. PDEToolbox de MatLab	13
3.2.1. Descripción de la PDEToolbox	13
3.2.2. Métodos numéricos usados por la PDEToolbox	15
3.2.3. Resolución de las ecuaciones	41
3.3. Integrales en coordenadas baricéntricas	42
3.4. Condiciones de contorno absorbentes: Perfectly Matched Layer	43
3.4.1. Perfectly Matched Layer	44
3.5. Condiciones de contorno periódicas	45
4. Fibras ópticas	49
4.1. Introducción	49
4.2. Fundamentos teóricos de la fibra óptica	49
4.2.1. Fibras cilíndricas	49
4.3. Implementación numérica del problema	60
4.3.1. PDEToolbox	60
4.4. Resultados experimentales	61
4.4.1. Fibras multimodo	62
4.4.2. Fibras monomodo	73
4.5. Conclusiones	73

5. Fibras de Bragg	75
5.1. Introducción	75
5.2. Implementación numérica del problema	75
5.2.1. PDEToolbox	75
5.3. Resultados experimentales	76
5.4. Conclusiones	77
6. Fibras de cristal fotónico	85
6.1. Introducción	85
6.2. Implementación numérica del problema	85
6.3. Resultados experimentales	89
6.3.1. Modos de propagación en cristales fotónicos hexagonales	89
6.3.2. Dispersión en fibras hexagonales	94
6.4. Conclusiones	95
7. Otras fibras de cristal fotónico	103
7.1. Introducción	103
7.2. Fibras de cristal fotónico defectuosas	104
7.2.1. Defectos puntuales de fabricación	104
7.2.2. Defectos aleatorios de fabricación	110
7.3. Otras geometrías de cristal fotónico	117
7.3.1. Fibras hexagonales con huecos de forma elíptica	117
7.3.2. Fibras octogonales	117
7.3.3. Fibras cilíndricas	127
7.4. Conclusiones	127
8. Fibras <i>Tapered</i>	133
8.1. Introducción	133
8.2. Implementación numérica del problema	134
8.3. Resultados experimentales	135
8.4. Conclusiones	138
9. Conclusiones	141
9.1. Introducción	141
9.2. Implementación numérica del problema	141
9.3. Simulaciones numéricas realizadas	142
9.3.1. Simulaciones en Fibras Ópticas	143
9.3.2. Simulaciones en Fibras Bragg	143
9.3.3. Simulaciones en Fibras de Cristales Fotónicos	143
9.4. Otras Líneas de Investigación	144
A. Integrales en coordenadas baricéntricas	145
B. PHOTONICS v1.0	153

ÍNDICE GENERAL

VII

Bibliografía

161

Índice de figuras

1.1. Sección transversal de una fibra de cristal fotónico en la que se puede observar la existencia de huecos en disposición hexagonal que discurren a lo largo de la misma paralelos a su eje longitudinal [1].	2
2.1. Corte transversal en diferentes tipos de fibras. De izquierda a derecha, fibra óptica, fibra de Bragg y cristal fotónico.	6
2.2. Fenómeno de la reflexión total interna en fibras ópticas [3].	7
2.3. Geometría de cristal fotónico y fibra de Bragg donde se muestran los índices de refracción del material (núcleo o defecto de la fibra) y el índice de refracción medio del revestimiento.	8
3.1. (a) Malla triangular básica (sin refinados) de una fibra de cristal fotónico hallada mediante el método estándar de Delaunay con restricciones. (b) Aproximación de la función solución mediante polinomios de grado 1[5].	16
3.2. Bases lineales usadas en este proyecto para resolver el problema mediante el método de Elementos Finitos donde se muestra el acoplamiento entre ellas [2].	19
3.3. Capa absorbente (PML) introducida en un problema de cristales fotónicos para evitar el efecto de reflexión debido a las condiciones de contorno del problema. La zona exterior es la capa absorbente, mientras que la zona interior (Ω) es el dominio del problema físico a resolver.	44
3.4. Cuadrado del índice de refracción complejo n para una fibra óptica con índices de refracción de 1.55 y 1.545 en el núcleo y en el revestimiento, respectivamente.	46
3.5. Geometrías truncadas de fibras de cristal fotónico donde se pueden distinguir cada uno de los diferentes contornos que la constituyen.	47
4.1. Configuraciones del campo eléctrico para los tres modos LP de orden más bajo ilustrados en términos de los modos exactos que los constituyen: (a) Designación de los modos LP ; (b) Designación de los modos exactos; (c) Distribución del campo eléctrico de los modos exactos; (d) Distribución de la intensidad de E_x de los modos exactos indicando el perfil de la intensidad del campo eléctrico para los correspondientes modos LP [19].	51

4.2. Correspondencia entre los modos polarizados linealmente de orden más bajo y los modos exactos tradicionales de los cuáles están formados [19].	52
4.3. (a) Funciones de Bessel de primera clase $\nu = 1, 2 \dots 6$ en función de r . (b) Funciones de Bessel de segunda clase $\nu = 1, 2 \dots 4$ en función de r	54
4.4. Funciones de Bessel de primera clase modificada $\nu = 1, 2 \dots 4$ en función de r	54
4.5. Constante de propagación normalizada b como función de la frecuencia normalizada para un número de modos LP [19].	56
4.6. Función aproximada que da el número de modos propagantes en una fibra óptica de valor V	57
4.7. Corte transversal de una geometría de fibra óptica.	61
4.8. Modos normales de propagación en fibras ópticas hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.	63
4.9. Modos normales de propagación en fibras ópticas hallado por el método escalar de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.	66
4.10. Modos normales de propagación analíticos en fibras ópticas, para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.	69
4.11. (a) Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (R_c/λ) para el método de los Elementos Finitos y la solución analítica. (b) Error en % cometido en cada método respecto a la solución analítica.	70
4.12. Modos normales evanescentes en fibras ópticas hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.	71
4.13. Espacio relativo que recorre el primer modo principal y el primer modo evanescente en la fibra óptica representada en la figura 4.8 [2].	72
4.14. (a) Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (R_c/λ) para el método de los Elementos Finitos y la solución analítica. (b) Error en % cometido en cada método respecto a la solución analítica.	73
4.15. (a) Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (R_c/λ) para el método de los Elementos Finitos y la solución analítica. (b) Error en % cometido por el método vectorial respecto a la solución analítica.	74

5.1. (a) Geometría de una fibra de tipo Bragg con $\Lambda_d = \Lambda$. En la zona exterior se encuentra la capa tipo PML, mientras en la zona interior tenemos la estructura de capas con huecos en forma de anillo. (b) Mallado de la geometría.	76
5.2. Modos normales de propagación en fibra de Bragg hallados por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el silicio de 1.46 y en el aire de 1.00, a una longitud de onda de 300 nm.	80
5.3. Modos normales de propagación en fibra de Bragg hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el silicio de 1.46 y en el aire de 1.00, a una longitud de onda de 600 nm.	82
5.4. Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (Λ_d/λ) para una fibra de Bragg con $\Lambda = \Lambda_d = 1,190\mu m$, $e = 0,247\mu m$	83
5.5. Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (Λ_d/λ) para una fibra de Bragg con $\Lambda_d = 12\mu m$, $\Lambda = 4\mu m$, $e = 2\mu m$	83
5.6. Indice de refracción efectivo de los 1000 primeros modos de una fibra tipo Bragg para una fibra con $\Lambda_d = \Lambda = 12\mu m$, $e = 2\mu m$ [2].	84
6.1. Geometría y mallado de una fibra hexagonal de cristal fotónico, con una capa PML en la zona externa.	86
6.2. (a) Geometría elemental del revestimiento de un fibra hexagonal de cristal fotónico para el cálculo de n_{FSM} . (b) Geometría de un fibra hexagonal de cristal fotónico con el defecto sustituido para el cálculo de n_{FSM}	87
6.3. Frecuencia efectiva normalizada como función de Λ/λ para varios diámetros de agujeros [23].	88
6.4. Radio del núcleo efectivo como función de d_h/λ para varios diámetros de agujeros [23].	89
6.5. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$	90
6.6. Modos fundamentales en una fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm. (a) $\Lambda = 23\mu m$ $d_h = 16\mu m$. (b) $\Lambda = 23\mu m$ $d_h = 6\mu m$. . .	96
6.7. Representación vectorial de los modos fundamentales en una fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un zoom de la zona central del núcleo o defecto para observar con claridad la ortogonalidad.	97
6.8. Modos evanescentes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 10\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$	98
6.9. Modos fundamentales en una fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm (a) $d_h = 9,421\mu m$ $\Lambda = 23\mu m$. (b) $d_h = 10\mu m$ $\Lambda = 23\mu m$. . .	100

6.10. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $\Lambda = 23\mu m$, y $d_h = 16\mu m$ y $d_h = 6\mu m$ respectivamente.	101
6.11. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 6\mu m$, y $\Lambda = 23\mu m$ y $\Lambda = 8,625\mu m$ respectivamente.	102
6.12. Birrefringencia para longitudes de onda entre 300 nm y 1500 nm en fibras con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 18,4, 16, 6\mu m$	102
 7.1. Geometría de cristal fotónico con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 16\mu m$, donde se han introducido dos huecos con mitad de diámetro que el resto.	105
7.2. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con dos huecos de mitad de diámetro que el resto.	106
7.3. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 16\mu m$ y $\Lambda = 23\mu m$, una de ellas con huecos de $d_h = 8\mu m$	108
7.4. Geometría de cristal fotónico con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 6\mu m$, donde se han introducido dos huecos con diámetro doble que el resto.	108
7.5. Modos fundamentales a una longitud de onda de 900 nm en fibras con $d_h = 6\mu m$, y $\Lambda = 23\mu m$. El defecto introducido son dos huecos de diámetro doble $d_h = 12\mu m$	109
7.6. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 6\mu m$ y $\Lambda = 23\mu m$, una de ellas con huecos de $d_h = 12\mu m$	109
7.7. Geometría de cristal fotónico con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 16\mu m$, donde se ha eliminado uno de los huecos de la primera capa en (a) mientras que en (b) la ausencia de hueco se da en la segunda capa.	111
7.8. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con un hueco ausente.	112
7.9. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con un hueco ausente.	114
7.10. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 16\mu m$ y $\Lambda = 23\mu m$, donde en dos de ellas se ha eliminado un hueco hueco.	116
7.11. Geometría de cristal fotónico con un 10 % de defectos introducidos de forma aleatoria.	116
7.12. Modos normales en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 18,4\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con una deformación aleatoria del 10 %. .	118

7.13. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1500 nm en cristal fotónico con defectos aleatorios.	119
7.14. Fibra con huecos de forma elíptica, con semiejes mayor y menor de $6\mu m$ y $3\mu m$ respectivamente y $\Lambda = 15\mu m$	119
7.15. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 600 nm con semiejes mayor y menor de $6\mu m$ y $3\mu m$ respectivamente y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 15\mu m$	120
7.16. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibra elíptica con $\Lambda = 15\mu m$ con semiejes mayor y menor de $6\mu m$ y $3\mu m$ respectivamente.	122
7.17. Geometría de cristal fotónico con huecos situados en los vértices de un octógono con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 10\mu m$	122
7.18. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico octogonal, a una longitud de onda de 600 nm con un diámetro de hueco $d_h = 10\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$	123
7.19. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibra octogonal con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 10\mu m$	127
7.20. Geometría de cristal fotónico con huecos situados en una distribución cilíndrica.	128
7.21. Modos propagantes en fibra de cristal fotónico cilíndrica, a una longitud de onda de 300 nm con una separación entre capas $\Lambda = 5\mu m$	129
7.22. Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibra cilíndrica con $\Lambda = 5\mu m$	132
8.1. Representación real de fibras (<i>tapered</i>) con una sola capa de agujeros de aire [34].	133
8.2. Diagrama esquemático del proceso de fusión y estiramiento para una fibra de cristal fotónico [33].	134
8.3. (a) Geometría de cristal fotónico estrechado (<i>tapered</i>) con el aire exterior para el confinamiento de los modos. (b) Zoom de la figura (a) donde se muestra sólo la geometría del cristal fotónico estrechado (<i>tapered</i>).	135
8.4. (a) Malla de cristal fotónico estrechado (<i>tapered</i>) con el aire exterior para el confinamiento de los modos. (b) Zoom de la figura (a) donde se muestra sólo la geometría del cristal fotónico estrechado (<i>tapered</i>).	136
8.5. Evolución del modo fundamental conforme la relación entre el diámetro exterior y la longitud de onda, D/λ , va disminuyendo a una longitud de onda de 1000 nm (estrechamiento de la fibra).	137
8.6. Modos normales de propagación en cristal fotónico estrechado hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal) a una longitud de onda de 1000 nm para $\Lambda = 3,9\lambda$. (a) Cristal sin defectos de fabricación. (b) Cristal con defectos aleatorios de fabricación (10%).	139

Índice de tablas

4.1. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación vectorial realizada en la figura 4.8.	65
4.2. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación escalar presentada en la figura 4.9.	68
4.3. Valores del índice de refracción efectivo analítico n_{eff}	68
4.4. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos evanescentes representados en la figura 4.12.	72
5.1. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación vectorial presentada en la figura 5.2.	78
5.2. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación vectorial presentada en la figura 5.3.	79
6.1. Tabla en la que se indica las condiciones de contorno necesarias para el cálculo del n_{FSM} de una fibra de cristal fotónico para cada una de las polarizaciones.	87
6.2. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 6.5.	93
6.3. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos evanescentes representados en la figura 6.8.	94
7.1. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.2.	110
7.2. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.5.	110
7.3. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.8.	111
7.4. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.9.	113
7.5. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.15.	121
7.6. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.18.	126

7.7. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.21	128
8.1. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la figura 8.5.	136
8.2. Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 8.6.	138
9.1. Tabla donde se exponen parámetros de rapidez y precisión del método numérico implementado (ensamblaje normal) conforme aumenta el tamaño de la malla.	142

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

Se llama **fotónica** a la ciencia que trata sobre la luz y otras formas de energía cuya unidad cuántica básica es el fotón. Con esta definición, la fotónica abarca un amplio campo, desde sistemas de comunicación ópticos hasta lentes, láseres, etc. Ésta es, en muchos aspectos, una ciencia bastante reciente aunque de rápido crecimiento debido a sus muy diversas aplicaciones, de gran interés práctico, en diversas disciplinas como la medicina, las comunicaciones, el análisis de soldaduras y materiales, etc. En el presente proyecto se atenderá a su aplicación en el campo de las comunicaciones, es decir, el transporte de información vía luz, usando los fotones como vehículos para la transmisión de datos e instrucciones. Este campo incluye el estudio de fenómenos como la emisión de luz, su transmisión, desviación, amplificación y detección por medio de instrumentos ópticos, láseres y otras fuentes de luz, fibras ópticas, equipo de instrumentos electro-ópticos y electrónica relacionada.

Actualmente se está generalizando el uso de fibra óptica en tareas de comunicación (especialmente para las comunicaciones vía Internet) sirviendo de cauce para el flujo de información enviada mediante el uso de láseres y transportada por medio de fotones. Para ello, constan de un núcleo por donde circula la señal portadora y un revestimiento de propiedades tales que hacen que ésta quede recluida en el interior del núcleo sin que se produzcan “fugas” hacia el ambiente exterior.

Debido a la gran velocidad con que se propagan los fotones a lo largo de la fibra óptica, se ha conseguido agilizar las comunicaciones a larga distancia, provocando un aumento del ancho de banda convirtiéndose en uno de los avances más importantes en telecomunicaciones de los últimos tiempos, mediante el cual se ha comprobado las grandes posibilidades de la tecnología óptica que podría sustituir a los actuales subsistemas electrónicos; además de disponer de dispositivos totalmente ópticos de ultra-alta velocidad integrados en chips capaces de intercomunicarse ópticamente. Por otra parte, estos dispositivos podrían ser la piedra angular de nuevos computadores ópticos que superen las limitaciones impuestas por la progresiva miniaturización de los actuales procesadores de

silicio.

El presente proyecto está enfocado hacia otro tipo de fibras: las fibras de cristal fotónico. Los cristales fotónicos son nuevos materiales nanoestructurados que presentan propiedades exclusivas, ya aplicadas para fibras ópticas que permiten fabricar nuevos dispositivos optoelectrónicos más rápidos, más eficaces y más pequeños para las telecomunicaciones fotónicas y la computación óptica. Presentan estructuras con banda prohibida para fotones (o *photonic bandgap*, PBG), constituidas por variaciones periódicas en el índice de refracción del material que las constituye. En analogía con las bandas electrónicas de sólidos ordenados (como los materiales semiconductores), donde la periodicidad atómica origina bandas o niveles de energía para los electrones, la distribución espacial de la constante dieléctrica en el caso de los cristales fotónicos origina una estructura de bandas para fotones. Estas bandas pueden diseñarse a voluntad (de forma análoga a la ingeniería de bandas en los materiales semiconductores), por lo que estas estructuras pueden impedir o favorecer la propagación de fotones con determinadas energías. Tanto la periodicidad como las dimensiones físicas de las zonas de variación de la constante dieléctrica están relacionadas con la longitud de onda de los fotones que se propagan, exigiendo para estas zonas dimensiones en la escala de nanómetros para fotones con energías dentro del espectro visible e infrarrojo cercano.

Las fibras de cristal fotónico están compuestas de cierto material cristalino (silicio normalmente) en el cual se presenta una estructura de huecos cilíndricos alineados con el eje de la fibra (figura 1.1).

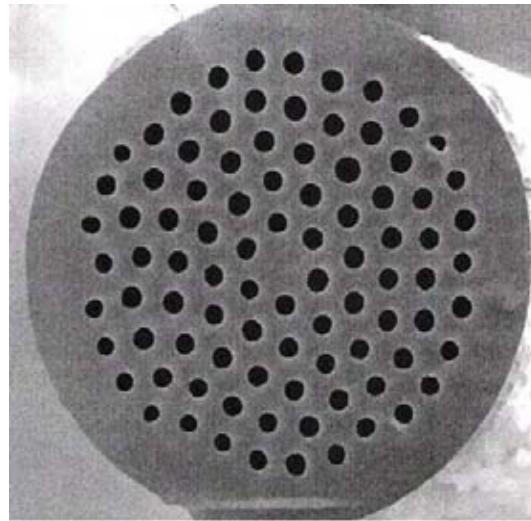


Figura 1.1: Sección transversal de una fibra de cristal fotónico en la que se puede observar la existencia de huecos en disposición hexagonal que discurren a lo largo de la misma paralelos a su eje longitudinal [1].

El índice de refracción de los huecos será distinto al índice de refracción del material,

lo que producirá efectos de reflexión-refracción al hacer pasar luz a través del mismo. Con estas fibras se consigue un extenso rango de operación monomodo, así como un control del efecto de la dispersión. En cuanto a sus aplicaciones, estas fibras han generado grandes expectativas en dispositivos de fibra para comunicaciones, fuentes de luz blanca, sensores de fibra, así como medio óptimo de transmisión de alta potencia.

1.2. Objetivos

El presente proyecto trata del estudio vectorial de modos normales en fibras de cristal fotónico. Estos modos son la distribución de las ondas electromagnéticas en la sección transversal de la fibra, tratándose, por tanto, de un estudio bidimensional. No obstante, una vez hallado el campo transversal es posible calcular la componente longitudinal, algo que no puede conseguirse mediante el tratamiento escalar del problema usando la PDEToolbox de MatLab. Por tanto, es un estudio complementario al que ya se realizó en [2], en el que se hará hincapié en la viabilidad y precisión del método mediante el estudio del mismo problema en otro tipo de fibras, cuyo comportamiento es conocido, para posteriormente hallar los aspectos más destacados de los modos de propagación en fibras de cristal fotónico.

El proyecto está estructurado de la siguiente manera: en el capítulo segundo se explicará brevemente los fundamentos teóricos del problema electromagnético que se presenta. En él, se atenderá al fenómeno de la reflexión total interna que gobierna la transmisión de los haces de luz en el interior del núcleo de fibra óptica y cuya generalización se puede extender para otro tipo de fibras (fibras de Bragg y cristales fotónicos). También se expondrán las ecuaciones generales del electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell), así como el origen de la ecuación de Helmholtz que se resolverá numéricamente en capítulos posteriores para calcular las componentes transversales del campo magnético.

En el tercer capítulo se explicarán los fundamentos de los métodos numéricos que se han empleado para la simulación de las fibras. Se comenzará por una breve descripción de la PDEToolbox de MatLab donde se encuentran implementadas muchas de las funciones que necesitaremos para desarrollar nuestro método numérico. Posteriormente se desarrolla la formulación del método de los Elementos Finitos para el problema considerado. Al final del capítulo se comenta el concepto de condición de contorno absorbente, poniendo especial importancia a la aplicación de la condición tipo PML (*Perfectly Matched Layer*). Asimismo, se explicará en qué consiste la condición de contorno periódica que produce una reducción del dominio de integración del problema con el consiguiente ahorro computacional.

En un cuarto capítulo, se abordará el estudio de fibras ópticas, y la verificación de los resultados obtenidos para las mismas mediante su comparación con la solución analítica del problema basada en las funciones de Bessel y con la solución escalar obtenida en estudios anteriores.

En el capítulo quinto se estudiarán las fibras tipo Bragg, para realizar una comparativa

de los resultados con los métodos numéricos a fin de elegir el más adecuado para el estudio de cristales fotónicos, atendiendo a criterios de precisión y fiabilidad de los métodos, así como la velocidad de los mismos.

En el capítulo sexto se procederá al estudio de modos normales en cristales fotónicos hexagonales, observando la forma que presentan los mismos, los valores del número de onda obtenido, etc. Se analizarán los conceptos de dispersión y birrefringencia presentados por este tipo de fibras.

En un séptimo capítulo, se simularán fibras de cristal fotónico reales ya que se introducirán defectos típicos procedentes del proceso de fabricación. Este es uno de los capítulos más interesantes del presente proyecto pues además someteremos a estudio cristales fotónicos con geometrías distintas a la hexagonal típica.

A continuación, en el capítulo octavo introduciremos las fibras estrechadas mediante fusión y estiramiento (*tapered*) que son fibras donde las dimensiones del cristal son del mismo orden que la longitud de onda de la señal portadora. Haremos una breve descripción del proceso de obtención de este tipo de fibra. Además, las simularemos analizando cómo varía el modo principal conforme las dimensiones del cristal van disminuyendo.

Por último, habrá un noveno capítulo con las conclusiones más importantes que se obtengan del estudio, así como otras posibles líneas de investigación relacionadas.

Asimismo, se dispone de dos apéndices: en el primero de ellos se resuelven las integrales necesarias para la implementación del método numérico, y en el segundo se explica el software que se adjunta en el proyecto. Para ello se presentan las etapas necesarias para la simulación numérica de cualquiera de las fibras aquí tratadas.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1. Introducción

En el presente capítulo se explicarán brevemente los fundamentos físicos y matemáticos más importantes en los que se basa la transmisión de ondas electromagnéticas en fibras, tanto ópticas como fibras de Bragg o cristales fotónicos.

En primer lugar, se realizará una breve descripción de los fenómenos de reflexión y refracción de la luz que tienen lugar en las fibras. Posteriormente, se expondrán las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de la propagación de ondas electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell), para finalmente deducir la ecuación de autovalores con que se halla la distribución de modos en un corte transversal de la fibra (ecuación de Helmholtz vectorial).

2.2. Tipos de Fibras

Las fibras que se usan hoy en día en tareas de telecomunicaciones mediante técnicas fotónicas (por luz) son las fibras ópticas. Estas fibras constan de un núcleo central con un índice de refracción dado y un revestimiento a su alrededor de espesor mucho mayor al del núcleo y con un índice de refracción ligeramente menor al del núcleo para así conseguir reflexión total interna (ver sección 2.3). Con esta disposición se consigue confinar la onda electromagnética (la luz) en el núcleo de la geometría, transmitiéndose dicha onda longitudinalmente a lo largo la misma.

Otros tipos de fibra, que no se usan en la práctica actualmente (se encuentran en proceso de investigación), aunque levantan grandes expectativas, son las fibras de Bragg y, sobre todo, las fibras de cristal fotónico. Las fibras de Bragg de núcleo sólido constan de un material al que se le ha realizado una serie de huecos en forma de anillos concéntricos estando unidas las partes materiales mediante una serie de pequeños puentes que proporcionan rigidez a la estructura. De esta forma, se consigue una transmisión de la onda en su modo fundamental en el centro de la geometría, mediante reflexión total interna al

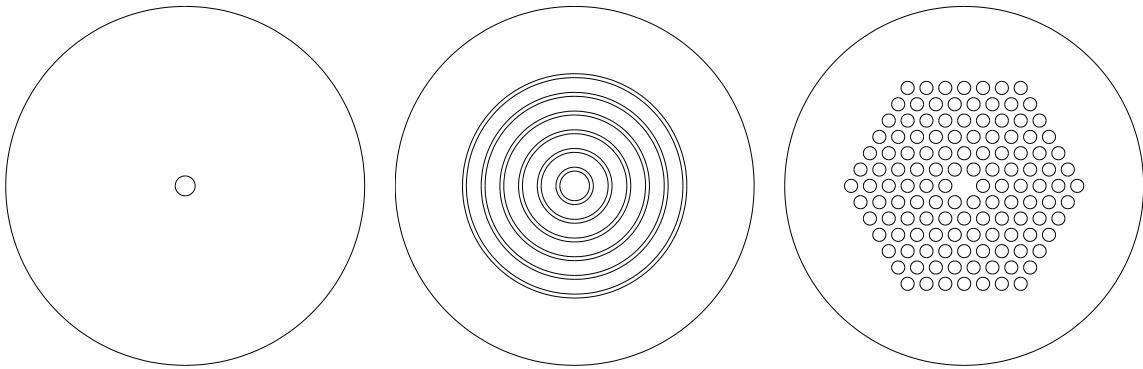


Figura 2.1: Corte transversal en diferentes tipos de fibras. De izquierda a derecha, fibra óptica, fibra de Bragg y cristal fotónico.

igual que en el caso anterior.

Las fibras de cristal fotónico son fibras constituidas de cierto material al que se le han practicado una serie de huecos, habitualmente cilíndricos, en toda su geometría menos en el centro (normalmente) ordenados con una cierta periodicidad, de modo que en esa zona central, también denominada defecto, se produce el fenómeno de reflexión total interna, propagándose la onda a través de la fibra siguiendo el eje longitudinal de la misma.

La geometría de estas fibras (corte transversal de las mismas) se muestra en la figura 2.1, y serán el objeto principal de estudio en el presente proyecto, dando especial importancia a los cristales fotónicos. Destacamos la ausencia del puenteado en el modelado de la fibra de Bragg pues sólo aporta consistencia mecánica debido a su estrechez.

2.3. Reflexión y Refracción en Fibras

Al pasar una onda de un medio material a otro, se pueden producir los fenómenos de reflexión y refracción en la interfase de ambos medios. En la *reflexión*, la onda que incide en la superficie de separación de los medios refleja con un ángulo respecto a la normal a la superficie de la interfase igual al ángulo de incidencia. En la *refracción*, lo que se produce es un cambio en la dirección de la onda debido al cambio de su velocidad de propagación al pasar de un material a otro, pasando a tener un ángulo respecto a la normal mayor al de la onda incidente si la velocidad de propagación de la onda aumenta y menor si disminuye. Esto se puede ver más claramente con el concepto de índice de refracción de un medio. Se define el índice de refracción, n , de un material como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de propagación v en dicho medio, es decir,

$$n = \frac{c}{v}. \quad (2.1)$$

El fenómeno de la refracción está gobernado por la ley de Snell, según la cual el

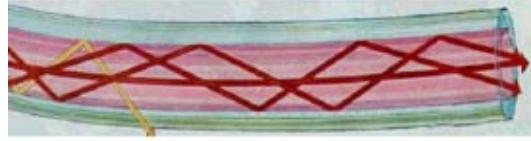


Figura 2.2: Fenómeno de la reflexión total interna en fibras ópticas [3].

producto del índice de refracción y el seno del ángulo que forma la onda con la normal se mantiene constante al pasar de un medio a otro

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2). \quad (2.2)$$

En virtud de la ley anterior, si despejamos el seno del ángulo de la onda con la normal en el segundo medio,

$$\sin(\theta_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1), \quad (2.3)$$

vemos que pueden existir casos en los que la refracción es imposible. Así, si el segundo miembro de la ecuación (2.3) es mayor que uno, obtenemos que el seno del ángulo sería mayor que la unidad, algo que no puede ocurrir, con lo cual no se produciría refracción, produciéndose sólo reflexión (reflexión total, ya que toda la onda se refleja).

Esto es en lo que se basa la transmisión de ondas en fibras ópticas. Se tiene un núcleo con un índice de refracción dado y un revestimiento con índice de refracción ligeramente menor. Al incidir una onda electromagnética con la interfase de ambos medios siendo el ángulo de incidencia suficientemente grande, toda la onda se refleja sin que parte alguna se refracte, consiguiendo que la onda se transmita enteramente por el núcleo de la fibra (reflexión total interna, como se muestra en la figura 2.2).

En las fibras de cristal fotónico y fibras de Bragg, se produce también el fenómeno de reflexión total interna, a pesar de no existir una interfase clara entre un núcleo y un revestimiento, como ocurría en fibras ópticas. En su caso, la onda se transmite por una zona central de material donde no existen huecos. En la zona análoga al revestimiento en fibra óptica, existe una serie de huecos distribuidos de forma que la fibra tiene un índice de refracción medio menor al índice de refracción del material, creándose una diferencia en estos índices entre el centro y el resto, pudiéndose dar el fenómeno de la reflexión total interna (ver figura 2.3).

2.4. Propagación de ondas electromagnéticas

La propagación de ondas electromagnéticas viene gobernada clásicamente por las ecuaciones de Maxwell. Éstas forman un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales que, junto con la ecuación de conservación de carga y las ecuaciones constitutivas del material,

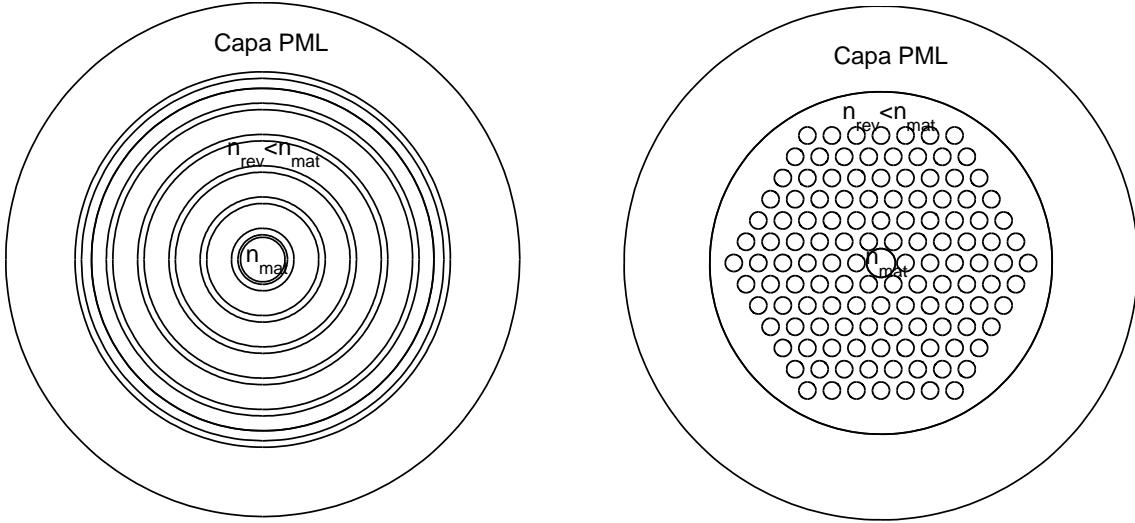


Figura 2.3: Geometría de cristal fotónico y fibra de Bragg donde se muestran los índices de refracción del material (núcleo o defecto de la fibra) y el índice de refracción medio del revestimiento.

permiten estudiar cualquier fenómeno de transmisión de ondas electromagnéticas. Estas ecuaciones son las que, a continuación, se exponen:

- Ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{J}}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.7)$$

- Ecuación de conservación de la carga:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0, \quad (2.8)$$

- Ecuaciones constitutivas del material:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}, \quad (2.9)$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}, \quad (2.10)$$

$$\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}, \quad (2.11)$$

siendo

\vec{E}	: Intensidad del campo eléctrico,	\vec{H}	: Intensidad del campo magnético,
\vec{B}	: Inducción magnética,	\vec{D}	: Inducción eléctrica,
\vec{J}	: Densidad de corriente eléctrica,	ρ	: Densidad de carga eléctrica,
ϵ	: Permitividad eléctrica,	μ	: Permeabilidad magnética,
\vec{P}	: Polarización eléctrica del medio,	\vec{M}	: Polarización magnética del medio,
σ	: Conductividad eléctrica.		

En estas ecuaciones, los campos eléctrico y magnético se encuentran acoplados, por lo que hallando uno de ellos se obtiene el otro.

Las ecuaciones de Maxwell son muy difíciles de resolver de forma exacta, existiendo solución analítica sólo para casos muy sencillos y simplificados. En general, es necesario desarrollar un método numérico para resolver un problema con estas ecuaciones.

En medios estacionarios se puede escribir cualquier solución de estas ecuaciones como una superposición de campos armónicos en el tiempo, es decir

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{x}, t) = \vec{H}(\vec{x}) \exp(i\omega t), \quad (2.12)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) \exp(i\omega t), \quad (2.13)$$

donde ω es la frecuencia angular e $i = \sqrt{-1}$. Si nos restringimos a medios isótropos, no magnéticos ($\vec{M} = 0$) y sin cargas ni corrientes ($\rho = 0, \vec{J} = 0$), estas ecuaciones pueden escribirse para los campos $\vec{H}(\vec{x})$ y $\vec{E}(\vec{x})$ de la forma

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{x}, t) = \frac{\partial(\epsilon(\vec{x})\vec{\mathbf{E}}(\vec{x}, t))}{\partial t}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}) = (i\omega)\epsilon_0 n^2(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial(\mu \vec{\mathbf{H}}(\vec{x}, t))}{\partial t}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = -(i\omega)\mu_0 \vec{H}(\vec{x}), \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{x}) = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon(\vec{x})\vec{\mathbf{E}}(\vec{x}, t)) = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot (n^2(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})) = 0, \quad (2.21)$$

donde $\epsilon(\vec{x}) = \epsilon_0 n^2(\vec{x})$, ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética del vacío y n es el índice de refracción del medio material. Si combinamos adecuadamente las ecuaciones (2.15) y (2.17) se tiene:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{n^2(\vec{x})} \nabla \times \vec{H}(\vec{x}) \right] = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{H}(\vec{x}) = k_o^2 \vec{H}(\vec{x}), \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{n^2(\vec{x})} \nabla \times [\nabla \times \vec{E}(\vec{x})] = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}(\vec{x}) = k_o^2 \vec{E}(\vec{x}), \quad (2.23)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío ($c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$) y k_o es el número de onda de la señal portadora ($k_o = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$).

Junto a estas ecuaciones los campos $\vec{H}(\vec{x})$ y $\vec{E}(\vec{x})$ han de cumplir las ligaduras impuestas por las ecuaciones (2.19) y (2.21).

En las ecuaciones podemos identificar entre corchetes los operadores que determinan respectivamente, el campo magnético, L_H , y el campo eléctrico, L_E :

$$L_H = \nabla \times \left[\frac{1}{n^2} \nabla \times \circ \right], \quad (2.24)$$

$$L_E = \frac{1}{n^2} \nabla \times [\nabla \times \circ]. \quad (2.25)$$

De esta manera, podemos reescribir las ecuaciones (2.22)-(2.23) de forma compacta como

$$L_H \vec{H}(\vec{x}) = k_o^2 \vec{H}(\vec{x}), \quad (2.26)$$

$$L_E \vec{E}(\vec{x}) = k_o^2 \vec{E}(\vec{x}). \quad (2.27)$$

Diagonalizando cualquiera de estos dos operadores, L_H o L_E , junto con las condiciones de frontera adecuadas y las ligaduras que imponen las condiciones de Maxwell entre los campos magnético y eléctrico, se obtiene la solución completa del problema.

En un medio invariante bajo traslaciones a lo largo de la dirección z , el índice de refracción, n , que nos determina los campos magnético y eléctrico tridimensionales sólo depende de las coordenadas transversales $\vec{x}_t = (x, y)$. Podemos escribir la solución de las ecuaciones de onda (2.15) y (2.17) como una combinación lineal de campos con una dependencia armónica en z , los llamados modos de la guía, de la forma

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{h}(\vec{x}_t) \exp(-i\beta z) = [\vec{h}_t(\vec{x}_t) + h_z(\vec{x}_t)\hat{z}] \exp(-i\beta z), \quad (2.28)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{e}(\vec{x}_t) \exp(-i\beta z) = [\vec{e}_t(\vec{x}_t) + e_z(\vec{x}_t)\hat{z}] \exp(-i\beta z). \quad (2.29)$$

donde β es la constante de propagación y \hat{z} representa el vector unitario perpendicular a la sección transversal de la fibra. El operador ∇ que aparece en las ecuaciones de onda

(2.15) y (2.17) lo descomponemos en su componente transversal, ∇_t , y longitudinal ∇_z , resultando

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z = \nabla_t - i\beta\hat{z}, \quad (2.30)$$

donde hemos tomado en consideración la dependencia exponencial de nuestros campos con la variable z .

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones (2.22) y (2.23) y separando de forma explícita las componentes transversales de las longitudinales, llegamos a las ecuaciones de onda que satisfacen las componentes transversales de estos campos, $\vec{h}_t = (h_x, h_y)$ y $\vec{e}_t = (e_x, e_y)$

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 + [\nabla_t (\ln n^2) \times (\nabla_t \times \circ)] \right\} \vec{h}_t = \beta^2 \vec{h}_t, \quad (2.31)$$

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 + \nabla_t [(\nabla_t \cdot \circ)] \right\} \vec{e}_t = \beta^2 \vec{e}_t. \quad (2.32)$$

Las ecuaciones para las componentes longitudinales son:

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 - \nabla_t (\ln n^2) \cdot \nabla_t (\circ) \right\} h_z = \beta^2 h_z + i\beta \vec{h}_t \cdot \nabla_t (\ln n^2), \quad (2.33)$$

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} e_z = \beta^2 e_z + i\beta \vec{e}_t \cdot \nabla_t (\ln n^2), \quad (2.34)$$

donde $n^2 = n^2(x, y)$.

A partir de aquí, nos ocuparemos únicamente de la ecuación para el cálculo del campo magnético transversal (2.31) porque resulta que para sistemas con n^2 real, L_H es autoadjunto respecto del producto escalar ordinario $\langle \circ | \circ \rangle$ del espacio de las funciones complejas de cuadrado integrable lo que ofrece enormes ventajas para su análisis numérico.

Teniendo en cuenta que

$$\nabla_t (\ln n^2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \ln n^2 = \left(\frac{\partial \ln n^2}{\partial x}, \frac{\partial \ln n^2}{\partial y}, 0 \right), \quad (2.35)$$

$$\nabla_t \times \vec{h}_t = \left(0, 0, \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right), \quad (2.36)$$

podemos escribir las ecuaciones para las dos componentes transversales h_x y h_y de la siguiente forma,

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h_x + \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) = \beta^2 h_x, \quad (2.37)$$

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h_y + \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) = \beta^2 h_y. \quad (2.38)$$

En el presente proyecto se resolverán las anteriores ecuaciones (ecuación de Helmholtz en formulación vectorial) para calcular los modos normales de propagación en distintos

tipos de fibra mediante el método de los Elementos Finitos (este método será comentado en el próximo capítulo). Una vez hallados éstos, estamos en disposición de calcular la componente longitudinal del campo h_z (aunque ésta no tiene el mismo interés que la componente transversal) y resolver completamente el problema usando la ecuación (2.33) que reescribimos de la siguiente forma:

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h_z - \left(\frac{\partial \ln n^2}{\partial x} \frac{\partial h_z}{\partial x} + \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) = \beta^2 h_z + i\beta \left(h_x \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} + h_y \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \right). \quad (2.39)$$

La simulación escalar realizada en [2] proviene de suponer que los gradientes del logaritmo del cuadrado del índice de refracción n son despreciables, en comparación con los otros términos de las ecuaciones (2.37)-(2.38), en toda la estructura con lo que las anteriores ecuaciones se solapan todas en una de ellas, a saber,

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h = \beta^2 h. \quad (2.40)$$

Esta ecuación escalar se puede resolver en su totalidad utilizando todos los recursos que la PDEToolbox de MatLab posee. Además la suposición anterior no se aleja tanto de la realidad pues en la mayoría de la estructura (excepto en las interfaces) se puede suponer la uniformidad del índice de refracción. De todas formas, la implementación del método numérico desarrollado en este proyecto contempla la posibilidad de realizar simulaciones escalares pues éstas no constituyen más que una simplificación del problema vectorial.

El uso de los métodos numéricos se hace necesario debido a que no se conocen soluciones analíticas del problema para geometrías complejas como las usadas para cristales fotónicos.

Capítulo 3

Métodos numéricos

3.1. Introducción

En este capítulo 3 se presenta una descripción del método numérico usado en la resolución del problema que es objeto de estudio en el presente proyecto. Este método es el método de los Elementos Finitos que hará uso de la PDEToolbox de MatLab. Dicho método ha sido usado para la resolución de problemas en gran variedad de campos, y en particular en problemas de cálculo de modos en ondas electromagnéticas con resultado positivo [4, 5, 6].

La estructura del capítulo será la siguiente: se explicarán brevemente algunos aspectos referentes a la PDEToolbox, como son su utilidad y campo de aplicación, métodos usados en su implementación, etc. Además se comentará brevemente cómo se resolverán las ecuaciones algebraicas resultado de la aplicación del método de Elementos Finitos desarrollado. A continuación, se explicará con detenimiento el cambio de variables necesario para resolver de forma sencilla las integrales que se obtienen en el método de Elementos Finitos desarrollado. Seguidamente, se introducirá el concepto de *Perfect Matched Layer (PML)*, usado como condición de contorno en la resolución del problema. Para terminar, comentaremos brevemente el tratamiento de la condición de contorno periódica.

3.2. PDEToolbox de MatLab

3.2.1. Descripción de la PDEToolbox

La PDEToolbox es una herramienta implementada en el paquete MatLab que permite la resolución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante un entorno de uso fácil y rápido [7]. Así, se encuentran ya implementadas funciones que nos permiten definir la geometría del problema, realizar el mallado de ésta, establecer condiciones de contorno, etc, de forma que sólo debemos preocuparnos de la correcta definición de nuestro problema.

Existen dos formas de usar esta Toolbox: la línea de comandos y el entorno PDETool. Esta función llama a un entorno gráfico donde la definición de los parámetros del problema se puede realizar directamente. El entorno consta de una ventana donde se muestra la geometría del problema, la malla que se está usando, la solución del problema, etc, según lo que estemos realizando en ese instante; además, consta de una serie de iconos que nos permiten usar las funciones más importantes directamente, y algunos menús desde los cuales tenemos acceso a las distintas funciones implementadas en esta herramienta, con los que podemos cambiar parámetros del problema, configuración de la pantalla e incluso exportar las soluciones al “workspace” de MatLab.

Por otro lado, podemos usar la línea de comandos o el editor de funciones de MatLab, donde tenemos acceso a todas las funciones de esta Toolbox, además del resto de funciones de MatLab, teniendo así mayor libertad a la hora de resolver nuestros problemas, aunque con el inconveniente de una mayor complejidad a la hora de usar estas funciones. En el caso del presente estudio se ha elegido el uso del editor de código para MatLab debido a la flexibilidad con que éste nos permite resolver los problemas.

Los pasos a seguir para la resolución de un problema en la PDEToolbox (tanto en el caso del entorno gráfico como de la línea de comandos) son:

- Definir la geometría del problema. Esta geometría deberá ser bidimensional (una de las limitaciones que se nos presenta es que sólo se pueden resolver problemas escalares en 2 dimensiones), y se representa mediante una matriz donde se indican todos los parámetros referentes al tipo de geometría del problema.
- Realizar el mallado de la geometría del problema. Para ello, Matlab dispone de una potente herramienta que realiza el mallado automáticamente una vez se ha definido la geometría; además, permite refinar la malla cuantas veces sea necesario de forma completa o por dominios.
- Establecer las condiciones de contorno. MatLab sólo permite establecer condiciones de contorno tipo Dirichlet, Neumann, Robin (Neumann generalizadas), o mixtas para el caso de resolución de un sistema de ecuaciones.
- Definir los coeficientes del problema. Éstos pueden ser distintos en los diferentes dominios del problema, y además pueden depender de las coordenadas del espacio y del tiempo, según la ecuación que se quiera resolver.
- Establecer la ecuación a resolver. Las ecuaciones que permite resolver esta Toolbox son cinco:
 - La ecuación parabólica

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u) + a \cdot u = f. \quad (3.1)$$

- La ecuación elíptica

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + a \cdot u = f. \quad (3.2)$$

- La ecuación elíptica no lineal

$$-\nabla \cdot (c(u)\nabla u) + a(u)u = f(u). \quad (3.3)$$

- La ecuación hiperbólica

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f. \quad (3.4)$$

- El problema de autovalores

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du. \quad (3.5)$$

En los casos de las ecuaciones parabólica e hiperbólica, los coeficientes c , d , a , y f pueden depender de las dos componentes en el espacio (x, y) y del tiempo, mientras que en el resto sólo dependen del espacio (en el problema no lineal también pueden depender de la solución u).

Para la ecuación que debemos resolver en el presente proyecto no podemos hacer uso de la PDEToolbox para la resolución de la misma por lo que se ha tenido que implementar un método de Elementos Finitos. No obstante, sí se ha podido hacer uso de todas las demás funciones de esta PDEToolbox lo que ha facilitado un poco la labor.

- Visualizar el resultado. Otra de las múltiples facilidades que da esta Toolbox es la existencia de funciones ya implementadas para la visualización de los resultados obtenidos directamente sin la necesidad de recurrir a las funciones generales de ploteado de MatLab, cuyo uso es algo más farragoso.

Para más detalles acerca de cómo resolver problemas en la PDEToolbox, consultar su manual [7].

3.2.2. Métodos numéricos usados por la PDEToolbox

La PDEToolbox de MatLab usa para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales vistas anteriormente el método de los Elementos Finitos. Este método, de sobra conocido y estudiado, ha sido usado para todo tipo de problemas en distintos campos con buenos resultados.

El método se basa en la discretización del dominio del problema mediante la triangulación de la geometría. Esta triangulación la lleva a cabo mediante el método de

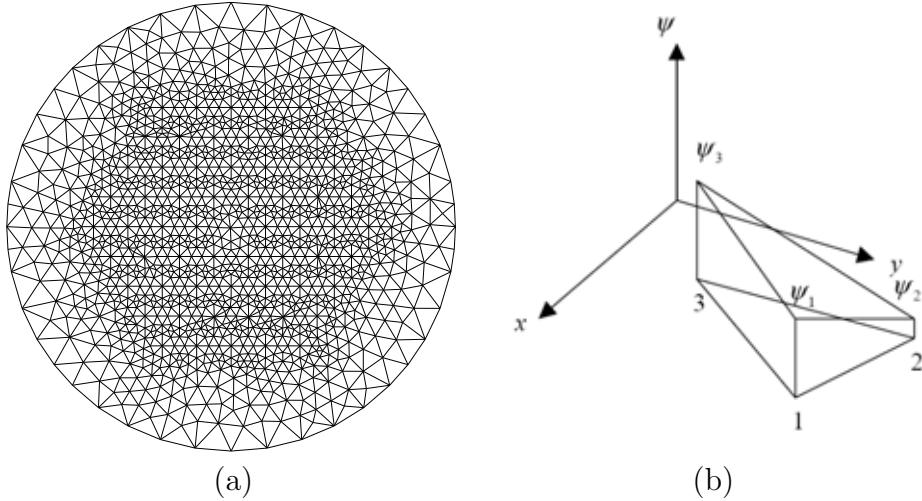


Figura 3.1: (a) Malla triangular básica (sin refinados) de una fibra de cristal fotónico hallada mediante el método estándar de Delaunay con restricciones. (b) Aproximación de la función solución mediante polinomios de grado 1[5].

Delaunay con restricciones (ver figura 3.1 (a)). En los vértices de estos triángulos se approxima la función mediante otras funciones definidas a trozos (por ejemplo, polinomios de grado $n \leq 1$; figura 3.1 (b)), llegando a un sistema de ecuaciones algebraicas que se puede resolver mediante cualquier método de los existentes para este tipo de problemas (factorización, cálculo de la inversa, Gauss-Jordan, etc.). A continuación, se explica en más detalle la formulación del método para la ecuación que se desea resolver en nuestro problema.

Para explicar el método de los Elementos Finitos [4], partimos de las ecuaciones (2.37)-(2.38) que recordamos aquí,

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h_x + \frac{\partial (\ln n^2)}{\partial y} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) = \beta^2 h_x, \quad (3.6)$$

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h_y + \frac{\partial (\ln n^2)}{\partial x} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) = \beta^2 h_y. \quad (3.7)$$

definida en cierto dominio Ω , donde h_x y h_y constituyen la solución del problema, con condiciones de frontera Robin homogéneas en el contorno $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (c \nabla h_x) + q h_x &= 0, \\ \vec{n} \cdot (c \nabla h_y) + q h_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Multiplicando la ecuación por una función de prueba v e integrando en Ω , se llega a la forma variacional continua: *Hallar h_x y h_y tal que*

$$\int_{\Omega} v \nabla_t^2 h_x d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_x n^2 d\Omega + \int_{\Omega} v \nabla_y (\ln n^2) (\nabla_x h_y - \nabla_y h_x) d\Omega = \beta^2 \int_{\Omega} v h_x d\Omega, \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} v \nabla_t^2 h_y d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_y n^2 d\Omega + \int_{\Omega} v \nabla_x (\ln n^2) (\nabla_y h_x - \nabla_x h_y) d\Omega = \beta^2 \int_{\Omega} v h_y d\Omega. \quad (3.10)$$

Integrando por partes obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} & [v (\nabla_x h_x + \nabla_y h_x)]_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} (\nabla_x v \nabla_x h_x + \nabla_y v \nabla_y h_x) d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_x n^2 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} v \nabla_y (\ln n^2) \nabla_x h_y d\Omega - \int_{\Omega} v \nabla_y (\ln n^2) \nabla_y h_x d\Omega = \beta^2 \int_{\Omega} v h_x d\Omega, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & [v (\nabla_x h_y + \nabla_y h_y)]_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} (\nabla_x v \nabla_x h_y + \nabla_y v \nabla_y h_y) d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_y n^2 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} v \nabla_x (\ln n^2) \nabla_y h_x d\Omega - \int_{\Omega} v \nabla_x (\ln n^2) \nabla_x h_y d\Omega = \beta^2 \int_{\Omega} v h_y d\Omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde (h_x, h_y) y v pertenecen al subespacio de búsqueda V_b y al subespacio de prueba V_p respectivamente (ambos contenidos en el espacio vectorial V). Las soluciones de la ecuación diferencial inicial son soluciones de la forma variacional o débil. Sin embargo, las soluciones de la forma variacional son soluciones de la ecuación sólo bajo ciertas restricciones.

Introduciendo condiciones de contorno:

$$h_x |_{\partial\Omega_D} = 0 \quad \text{Contorno Dirichlet} \quad (3.13)$$

$$h_x |_{\partial\Omega_{P_1}} = h_x |_{\partial\Omega_{P_2}} \quad \text{Contorno Periódico} \quad (3.14)$$

donde $\partial\Omega_{P_1}$ y $\partial\Omega_{P_2}$ representan cada uno de los contornos donde usaremos condiciones periódicas (ver figura 3.5) y $\partial\Omega_D$ representa la parte del contorno donde se impondrán condiciones Dirichlet homogéneas, tenemos:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\nabla_x v \nabla_x h_x + \nabla_y v \nabla_y h_x) d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_x n^2 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} v \nabla_y (\ln n^2) \nabla_x h_y d\Omega - \int_{\Omega} v \nabla_y (\ln n^2) \nabla_y h_x d\Omega = \beta^2 \int_{\Omega} v h_x d\Omega, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\nabla_x v \nabla_x h_y + \nabla_y v \nabla_y h_y) d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_y n^2 d\Omega + \\ & \int_{\Omega} v \nabla_x (\ln n^2) \nabla_y h_x d\Omega - \int_{\Omega} v \nabla_x (\ln n^2) \nabla_x h_y d\Omega = \beta^2 \int_{\Omega} v h_y d\Omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

El siguiente paso consiste en expandir tanto v como h_x, h_y y n^2 en una base del subespacio V_{N_p} , de dimensión finita e igual al número de nodos N_p de la malla, para obtener así la forma variacional discreta. La función v de prueba se elige como una de las de la base del subespacio $V_{N_p} \subset V$. El subespacio V_{N_p} viene determinado por la base nodal

$$V_\tau^1 \equiv \{\varphi_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y \mid \varphi_j(x_l, y_l) = \delta_{jl}\}. \quad (3.17)$$

Asimismo, en las ecuaciones se usarán los gradientes de estas funciones base que vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\nabla_x \varphi_j(x, y) = b_j, \quad \nabla_y \varphi_j(x, y) = c_j. \quad (3.18)$$

El campo magnético y el índice de refracción se desarrollarán en la base de manera que:

$$h_x(x, y) = \sum_{j=1}^{N_p} H_{x_j} \varphi_j(x, y), \quad (3.19)$$

$$h_y(x, y) = \sum_{j=1}^{N_p} H_{y_j} \varphi_j(x, y), \quad (3.20)$$

$$n^2(x, y) = \sum_{j=1}^{N_p} n_j^2 \varphi_j(x, y). \quad (3.21)$$

Para el cálculo de los coeficientes de las funciones base correspondientes a cada uno de los tres vértices de cada triángulo de la geometría no tenemos más que imponer la definición. Sea t_n un triángulo de la estructura con $P_I^{(n)}, P_{II}^{(n)}$ y $P_{III}^{(n)}$ sus tres vértices con coordenadas $(x_I^{(n)}, y_I^{(n)}), (x_{II}^{(n)}, y_{II}^{(n)})$ y $(x_{III}^{(n)}, y_{III}^{(n)})$, respectivamente. Sean $\{a_I^{(n)}, b_I^{(n)}, c_I^{(n)}\}$, $\{a_{II}^{(n)}, b_{II}^{(n)}, c_{II}^{(n)}\}$ y $\{a_{III}^{(n)}, b_{III}^{(n)}, c_{III}^{(n)}\}$ los coeficientes de las funciones base de cada uno de los vértices del triángulo t_n . Imponiendo $\varphi_j(x_l, y_l) = \delta_{jl}$ de la ecuación (3.17), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} a_I^{(n)} & b_I^{(n)} & c_I^{(n)} \\ a_{II}^{(n)} & b_{II}^{(n)} & c_{II}^{(n)} \\ a_{III}^{(n)} & b_{III}^{(n)} & c_{III}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_I^{(n)} & x_{II}^{(n)} & x_{III}^{(n)} \\ y_I^{(n)} & y_{II}^{(n)} & y_{III}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

Llamando $[\Phi]^{(n)}$ a la matriz de los coeficientes y $[X]^{(n)}$ a la matriz de las coordenadas de los vértices del triángulo t_n y resolviendo el anterior sistema de ecuaciones obtenemos las funciones base de la siguiente forma:

$$[\Phi]^{(n)} = \{[X]^{(n)}\}^{-1}. \quad (3.23)$$

Para la implementación numérica del método de Elementos Finitos es importante notar que las funciones base asociadas a un mismo nodo dependen del triángulo al que éste pertenezca.

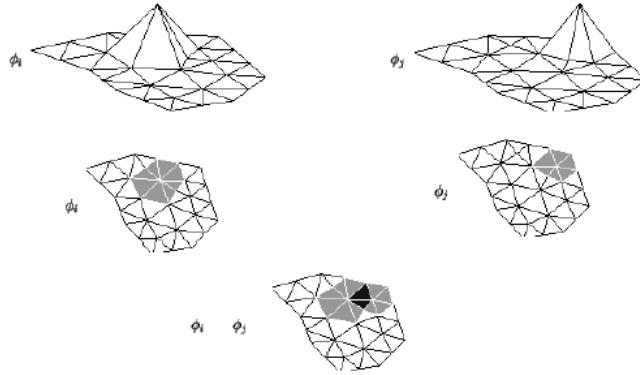


Figura 3.2: Bases lineales usadas en este proyecto para resolver el problema mediante el método de Elementos Finitos donde se muestra el acoplamiento entre ellas [2].

Asimismo, el dominio Ω lo descompondremos en un conjunto de triángulos, $\Omega = \bigcup_{n=1}^T t_n$, donde T representa el número de triángulos total de la estructura. Así, las ecuaciones (3.15)-(3.16) quedarán finalmente:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=1}^T \int \left\{ \nabla_x \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\
& + k_o^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (n^2)_m \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& + \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& - \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& = \beta^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)}, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=1}^T \int \left\{ \nabla_x \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\
& + k_o^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (n^2)_m \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (\ln n^2)_m \nabla_x \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& - \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& = \beta^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

con $j = 1, \dots, N_i$, siendo N_i el número total de nodos incógnitas y donde $d\Delta^{(t)}$ representa el elemento diferencial de área del triángulo t .

El par de sistemas de ecuaciones algebraicas (3.24)-(3.25) se pueden expresar de forma matricial en una sola ecuación como sigue:

$$([M] + k_o^2 [K_o] + [L_1] + [L_2]) \vec{H} = \beta^2 [B] \vec{H}, \tag{3.26}$$

siendo

$$\vec{H} = \left[H_{x,1} \ H_{y,1} \dots H_{x,j} \ H_{y,j} \dots H_{x,k} \ H_{y,k} \dots H_{x,l} \ H_{y,l} \dots H_{x,N_i} \ H_{y,N_i} \right]^T. \tag{3.27}$$

donde cada matriz se rellenará en parejas de filas contiguas pues cada nodo incógnita posee dos componentes del campo H incógnitas. Además, cabe mencionar que todas son matrices dispersas y complejas, excepto $[M]$ y $[B]$ que son dispersas y reales. Los elementos no nulos para cada una de las matrices son los siguientes:

$$\begin{aligned}
[M](2j-1, 2k-1) &= [M](2j, 2k) = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int [\nabla_x \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)}] d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} [b_j^{(t)} b_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)}] \int 1 d\Delta^{(t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_o](2j-1, 2k-1) &= \\
[K_o](2j, 2k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (n^2)_m \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} [(n^2)_j \varphi_j^{(t)} + (n^2)_k \varphi_k^{(t)} + (n^2)_l \varphi_l^{(t)}] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \Big] \\
& = \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(n^2)_j \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \right. \\
& \quad + \left(b_j^{(t)} a_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} b_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left(c_j^{(t)} a_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} c_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} a_j^{(t)} \right) \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} a_j^{(t)} \right) \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left. \left. + \left[a_j^{(t)} \left(b_k^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_j^{(t)} \right) \\
& \quad + a_j^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \Big] \int xy d\Delta^{(t)} \\
& \quad + b_j^{(t)} b_k^{(t)} b_j^{(t)} \int x^3 d\Delta^{(t)} \\
& \quad + c_j^{(t)} c_k^{(t)} c_j^{(t)} \int y^3 d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left. \left. \left. + \left(c_j^{(t)} b_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int x^2 y d\Delta^{(t)} \right. \right. \right. \\
& \quad + \left. \left. \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int xy^2 d\Delta^{(t)} \right\} \right. \\
& + (n^2)_k \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad + \left(b_j^{(t)} a_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} b_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} b_k^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left. \left. \left. + \left(c_j^{(t)} a_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} c_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} c_k^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} a_k^{(t)} \right) \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} a_k^{(t)} \right) \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left[a_j^{(t)} \left(b_k^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \\
& \quad \left. + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right. \\
& \quad \left. + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right] \int xy d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_k^{(t)} b_k^{(t)} \int x^3 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} c_k^{(t)} \int y^3 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} b_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} c_k^{(t)} \right) \int x^2 y d\Delta^{(t)} \\
& \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} b_k^{(t)} \right) \int xy^2 d\Delta^{(t)} \right\} \\
& + (n^2)_l \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} a_l^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(b_j^{(t)} a_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} b_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} b_l^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(c_j^{(t)} a_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} c_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} c_l^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} a_l^{(t)} \right) \int x^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} a_l^{(t)} \right) \int y^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left[a_j^{(t)} \left(b_k^{(t)} c_l^{(t)} + b_l^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_l^{(t)} + b_l^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_l^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy \, d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_k^{(t)} b_l^{(t)} \int x^3 \, d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} c_l^{(t)} \int y^3 \, d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} b_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} c_l^{(t)} \right) \int x^2 y \, d\Delta^{(t)} \\
& + \left. \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} b_l^{(t)} \right) \int xy^2 \, d\Delta^{(t)} \right\} .
\end{aligned}$$

Todas las matrices presentadas hasta aquí tienen una propiedad común que consiste en que las submatrices resultado de seleccionar filas y columnas impares y filas y columnas pares son idénticas para cada una de ellas. Estas matrices son las únicas, junto a $[B]$, que intervendrían en el problema escalar dando parejas de autovalores idénticos.

Las siguientes dos matrices, que contienen los términos logarítmicos, provocan el acoplamiento de las componentes transvesales del campo magnético.

$$\begin{aligned}
[L_1](2j-1, 2k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \left[(\ln n^2)_j \nabla_y \varphi_j^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \nabla_y \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right] \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] b_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] b_k^{(t)}
\end{aligned}$$

$$\cdot \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),$$

$$\begin{aligned}
[L_1](2j, 2k-1) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (\ln n^2)_m \nabla_x \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \left[(\ln n^2)_j \nabla_x \varphi_j^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \nabla_x \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right] \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right] c_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right] c_k^{(t)} \\
&\quad \cdot \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_2](2j-1, 2k-1) &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \left[(\ln n^2)_j \nabla_y \varphi_j^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \nabla_y \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \Big] \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] c_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] c_k^{(t)} \\
& \quad \cdot \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right), \\
[L_2](2j, 2k) & = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (\ln n^2)_m \nabla_x \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \left[(\ln n^2)_j \nabla_x \varphi_j^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (\ln n^2)_k \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (\ln n^2)_l \nabla_x \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right] \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right] b_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right] b_k^{(t)} \\
& \quad \cdot \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right).
\end{aligned}$$

La última de las matrices del problema, y que se muestra a continuación, es la responsable de la obtención de un problema de autovalores generalizado y posee la misma propiedad que las matrices $[M]$ y $[K_o]$, siendo sus elementos no nulos

$$\begin{aligned}
[B](2j-1, 2k-1) = [B](2j, 2k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} = \\
&\sum_{t=1}^{T_{jk}} \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
&+ \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
&+ \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
&+ b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
&+ c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
&\left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\},
\end{aligned}$$

con $j = 1, \dots, N_i$ y $k \in V_j$ siendo V_j el conjunto de vecinos de la incógnita j (asociada con el j -ésimo nodo) y donde T_{jk} es el número de triángulos a los que la incognita j (asociada con el j -ésimo nodo) y la incognita k (asociada con el k -ésimo nodo) pertenecen, N_{jk}^t es el número de vecinos que tienen las incógnitas j y k en el triángulo t y N_i es el número de nodos incógnitas.

A la hora de la implementación se debe tener en cuenta que un nodo es vecino de sí mismo para cada triángulo al que pertenezca por lo que N_{jk}^t será igual a 3 siempre, a saber, j , k y el otro vértice de t que en las ecuaciones hemos denominado l .

Una vez halladas las componentes transversales del campo, estamos en disposición de calcular la componente longitudinal partiendo de la ecuación (2.33) que recordamos:

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2 \right\} h_z - \left[\frac{\partial(\ln n^2)}{\partial x} \frac{\partial h_z}{\partial x} + \frac{\partial(\ln n^2)}{\partial y} \frac{\partial h_z}{\partial y} \right] = \beta^2 h_z + i\beta \left[h_x \frac{\partial(\ln n^2)}{\partial x} + h_y \frac{\partial(\ln n^2)}{\partial y} \right]. \quad (3.28)$$

Multiplicando la anterior ecuación por una función de prueba v , integrando por partes en todo el dominio Ω e introduciendo las condiciones de contorno obtenemos la siguiente ecuación para h_z :

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} (\nabla_x v \nabla_x h_z d\Omega + \nabla_y v \nabla_y h_z) d\Omega + k_o^2 \int_{\Omega} v h_z n^2 d\Omega - \\
&\int_{\Omega} v \nabla_x (\ln n^2) \nabla_x h_z d\Omega - \int_{\Omega} v \nabla_y (\ln n^2) \nabla_y h_z d\Omega - \beta^2 \int_{\Omega} v h_x d\Omega =
\end{aligned}$$

$$i\beta \left[h_x \nabla_x (\ln n^2) + h_y \nabla_x (\ln n^2) \right]. \quad (3.29)$$

Expandiendo tanto v como h_z y n^2 en una base del subespacio V_{N_p} , ver ecuación(3.17)

$$h_z(x, y) = \sum_{j=1}^{N_p} H_{z,j} \varphi_j(x, y) \quad (3.30)$$

obtenemos la forma variacional discreta. La función v de prueba se elige como una de las bases del subespacio $V_{N_p} \subset V$.

De esta manera:

$$\begin{aligned} & - \sum_{t=1}^T \int \left\{ \nabla_x \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\ & + k_o^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (n^2)_m \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & - \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (\ln n^2)_m \nabla_x \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & - \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_p} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & - \beta^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & = i\beta \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{k=1}^{N_p} (\ln n^2)_k \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{k=1}^{N_p} (\ln n^2)_k \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

con $j = 1, \dots, N_i$, siendo N_i el número total de nodos incógnitas y donde $d\Delta^{(t)}$ representa el elemento diferencial de área del triángulo t.

Esta última ecuación se puede poner en forma matricial de la forma:

$$([M_z] + k_o^2 [K_{oz}] + [L_{1z}] + [L_{2z}] - \beta^2 [B_z]) \vec{H}_z = i\beta \vec{F}_z, \quad (3.32)$$

siendo

$$\vec{H}_z = \left[H_{z,1} \dots H_{z,j} \dots H_{z,k} \dots H_{z,l} \dots H_{z,N_i} \right]^T. \quad (3.33)$$

y donde en cada matriz rellenaremos, fila a fila, los elementos no nulos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
[M_z](j, k) &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \left[\nabla_x \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[b_j^{(t)} b_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \right] \int 1 d\Delta^{(t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{oz}](j, k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (n^2)_m \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \left[(n^2)_j \varphi_j^{(t)} + (n^2)_k \varphi_k^{(t)} + (n^2)_l \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right] \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(n^2)_j \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(b_j^{(t)} a_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} b_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(c_j^{(t)} a_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} c_k^{(t)} a_j^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} a_j^{(t)} \right) \int x^2 d\Delta^{(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} a_j^{(t)} \right) \int y^2 d\Delta^{(t)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[a_j^{(t)} \left(b_k^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + a_j^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right] \int xy d\Delta^{(t)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_j^{(t)} b_k^{(t)} b_j^{(t)} \int x^3 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} c_j^{(t)} \int y^3 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} b_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} b_j^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int x^2 y d\Delta^{(t)} \\
& + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} c_j^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x y^2 d\Delta^{(t)} \Big\} \\
& + (n^2)_k \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& + \left(b_j^{(t)} a_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} b_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} b_k^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} a_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} c_k^{(t)} a_k^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} c_k^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} a_k^{(t)} \right) \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} a_k^{(t)} \right) \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left[a_j^{(t)} \left(b_k^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \\
& \quad \left. + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right. \\
& \quad \left. + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right] \int x y d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_k^{(t)} b_k^{(t)} \int x^3 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} c_k^{(t)} \int y^3 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} b_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} c_k^{(t)} \right) \int x^2 y d\Delta^{(t)} \\
& + \left. \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} b_k^{(t)} \right) \int x y^2 d\Delta^{(t)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (n^2)_l \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} a_l^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& + \left(b_j^{(t)} a_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} b_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} b_l^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} a_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} c_k^{(t)} a_l^{(t)} + a_j^{(t)} a_k^{(t)} c_l^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} a_l^{(t)} \right) \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} a_l^{(t)} \right) \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left[a_j^{(t)} \left(b_k^{(t)} c_l^{(t)} + b_l^{(t)} c_k^{(t)} \right) \right. \\
& + a_k^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_l^{(t)} + b_l^{(t)} c_j^{(t)} \right) \\
& \left. + a_l^{(t)} \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \right] \int xy d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_k^{(t)} b_l^{(t)} \int x^3 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} c_l^{(t)} \int y^3 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(c_j^{(t)} b_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} c_k^{(t)} b_l^{(t)} + b_j^{(t)} b_k^{(t)} c_l^{(t)} \right) \int x^2 y d\Delta^{(t)} \\
& \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} c_l^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)} b_l^{(t)} \right) \int xy^2 d\Delta^{(t)} \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{1z}](j, k) & = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (\ln n^2)_m \nabla_x \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \left[(\ln n^2)_j \nabla_x \varphi_j^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (\ln n^2)_k \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (\ln n^2)_l \nabla_x \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \nabla_x \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right] \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right] b_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right] b_k^{(t)} \\
&\quad \cdot \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{2z}](j, k) &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \left[\sum_{m=1}^{N_{jk}^t} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \left[(\ln n^2)_j \nabla_y \varphi_j^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_k \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right. \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \nabla_y \varphi_l^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad + (\ln n^2)_k \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&\quad \left. + (\ln n^2)_l \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \nabla_y \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \right] \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] c_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] c_k^{(t)} \\
&\quad \cdot \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_z](j, k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
&\quad + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
&\quad + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
&\quad + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
&\quad \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\}, \\
\vec{F}_z(j) &= \sum_{t=1}^{T_j} \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{N_j^t} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_j^t} (\ln n^2)_m \nabla_x \varphi_m^{(t)} \right] \right. \\
&\quad + \left. \left[\sum_{k=1}^{N_j^t} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] \left[\sum_{m=1}^{N_j^t} (\ln n^2)_m \nabla_y \varphi_m^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_j} \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[H_{x,j} \varphi_j^{(t)} + H_{x,k} \varphi_k^{(t)} + H_{x,l} \varphi_l^{(t)} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[(\ln n^2)_j \nabla_x \varphi_j^{(t)} + (\ln n^2)_k \nabla_x \varphi_k^{(t)} + (\ln n^2)_l \nabla_x \varphi_l^{(t)} \right] \\
&\quad + \left[H_{y,j} \varphi_j^{(t)} + H_{y,k} \varphi_k^{(t)} + H_{y,l} \varphi_l^{(t)} \right] \\
&\quad \cdot \left[(\ln n^2)_j \nabla_y \varphi_j^{(t)} + (\ln n^2)_k \nabla_y \varphi_k^{(t)} + (\ln n^2)_l \nabla_y \varphi_l^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_j} \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[H_{x,j} \varphi_j^{(t)} + H_{x,k} \varphi_k^{(t)} + H_{x,l} \varphi_l^{(t)} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[(\ln n^2)_j b_j^{(t)} + (\ln n^2)_k b_k^{(t)} + (\ln n^2)_l b_l^{(t)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[H_{y,j} \varphi_j^{(t)} + H_{y,k} \varphi_k^{(t)} + H_{y,l} \varphi_l^{(t)} \right] \\
& \cdot \left[(\ln n^2)_j c_j^{(t)} + (\ln n^2)_k c_k^{(t)} + (\ln n^2)_l c_l^{(t)} \right] \} d\Delta^{(t)} \\
= & \sum_{t=1}^{T_j} \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[H_{x,j} \varphi_j^{(t)} + H_{x,k} \varphi_k^{(t)} + H_{x,l} \varphi_l^{(t)} \right] Bln_{jkl}^{(t)} \right. \\
& \left. + \left[H_{y,j} \varphi_j^{(t)} + H_{y,k} \varphi_k^{(t)} + H_{y,l} \varphi_l^{(t)} \right] Cln_{jkl}^{(t)} \right\} d\Delta^{(t)} \\
= & \sum_{t=1}^{T_j} \left(Bln_{jkl}^{(t)} H_{x,j} + Cln_{jkl}^{(t)} H_{y,j} \right) \int \varphi_j^{(t)} \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& + \left(Bln_{jkl}^{(t)} H_{x,k} + Cln_{jkl}^{(t)} H_{y,k} \right) \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& + \left(Bln_{jkl}^{(t)} H_{x,l} + Cln_{jkl}^{(t)} H_{y,l} \right) \int \varphi_j^{(t)} \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} = \\
= & \sum_{t=1}^{T_j} \left(Bln_{jkl}^{(t)} H_{x,j} + Cln_{jkl}^{(t)} H_{y,j} \right) \left\{ a_j^{(t)} a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& + \left(a_j^{(t)} b_j^{(t)} + a_j^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} c_j^{(t)} + a_j^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_j^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_j^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\} \\
& + \left(Bln_{jkl}^{(t)} H_{x,k} + Cln_{jkl}^{(t)} H_{y,k} \right) \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \Big\} \\
& + \left(Bln_{jkl}^{(t)} H_{x,l} + Cln_{jkl}^{(t)} H_{y,l} \right) \left\{ a_j^{(t)} a_l^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& + \left(a_j^{(t)} b_l^{(t)} + a_l^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
& + \left(a_j^{(t)} c_l^{(t)} + a_l^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
& + b_j^{(t)} b_l^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
& + c_j^{(t)} c_l^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
& \left. + \left(b_j^{(t)} c_l^{(t)} + b_l^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\},
\end{aligned}$$

con $j = 1, \dots, N_i$ y $k \in V_j$ siendo V_j el conjunto de vecinos de la incógnita j (asociada con el j -ésimo nodo) y donde T_{jk} es el número de triángulos a los que la incognita j (asociada con el j -ésimo nodo) y la incognita k (asociada con el k -ésimo nodo) pertenecen, N_{jk}^t es el número de vecinos que tienen las incógnitas j y k en el triángulo t y N_i es el número de nodos incógnitas.

Otra posibilidad para resolver la ecuación vectorial de Helmholtz, que se ha desarrollado también en este proyecto, consiste en no expandir los parámetros ópticos característicos de la fibra (n^2 , $\ln n^2$) en la base y suponer un valor único para cada triángulo supuesto en el baricentro del mismo. Este valor medio se construye con la media ponderada de los valores en los vértices siendo el criterio de ponderación la distancia de cada uno de ellos al baricentro. Es decir:

$$\overline{n^2} = \frac{n_I^2 d_I + n_{II}^2 d_{II} + n_{III}^2 d_{III}}{(d_I + d_{II} + d_{III})}, \quad (3.34)$$

donde n_j^2 es el cuadrado del índice de refracción de cada vértices del triángulo y d_j representa la distancia de cada uno de los vértices al baricentro. Las coordenadas de este punto característico de cada triángulo vienen dadas por:

$$x_{baricentro} = \frac{x_I + x_{II} + x_{III}}{3}, \quad (3.35)$$

$$y_{baricentro} = \frac{y_I + y_{II} + y_{III}}{3}.$$

Con ello las ecuaciones (3.24)-(3.25) se simplifican a las siguientes:

$$\begin{aligned} & -\sum_{t=1}^T \int \left\{ \nabla_x \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\ & + k_o^2 \sum_{t=1}^T \overline{(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & + \sum_{t=1}^T \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & - \sum_{t=1}^T \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & = \beta^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{t=1}^T \int \left\{ \nabla_x \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)} \\ & + k_o^2 \sum_{t=1}^T \overline{(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & + \sum_{t=1}^T \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & - \sum_{t=1}^T \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\ & = \beta^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

con $j = 1, \dots, N_i$, siendo N_i el número total de nodos incógnitas y donde $d\Delta^{(t)}$ representa el elemento diferencial de área del triángulo t .

A continuación, se presentan las matrices (elementos no nulos) resultado de la simplificación realizada donde se observa una disminución en la complejidad de las expresiones:

$$\begin{aligned} [M](2j-1, 2k-1) &= [M](2j, 2k) = -\sum_{t=1}^{T_{jk}} \int [\nabla_x \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)}] d\Delta^{(t)} \\ &= -\sum_{t=1}^{T_{jk}} [b_j^{(t)} b_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)}] \int 1 d\Delta^{(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_o](2j-1, 2k-1) &= \\
[K_o](2j, 2k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} = \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{(n^2)^{(t)}} \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
&\quad + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
&\quad + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
&\quad + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
&\quad \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_1](2j-1, 2k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} b_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} b_k^{(t)} \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_1](2j, 2k-1) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} c_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} c_k^{(t)} \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$[L_2](2j-1, 2k-1) = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} c_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} c_k^{(t)} \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_2](2j, 2k) &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} b_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} b_k^{(t)} \left(a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y d\Delta^{(t)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B](2j-1, 2k-1) &= [B](2j, 2k) = \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
&\quad + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \\
&\quad + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \\
&\quad + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \\
&\quad + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \\
&\quad \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\},
\end{aligned}$$

con $j = 1, \dots, N_i$ y $k \in V_j$ siendo V_j el conjunto de vecinos de la incógnita j (asociada con el j -ésimo nodo) y donde T_{jk} es el número de triángulos a los que la incognita j (asociada con el j -ésimo nodo) y la incógnita k (asociada con el k -ésimo nodo) pertenecen, N_{jk}^t es el número de vecinos que tienen las incógnitas j y k en el triángulo t y N_i es el número de nodos incógnitas.

Asimismo, la ecuación para el cálculo de h_z se reduce a la siguiente:

$$-\sum_{t=1}^T \int \left\{ \nabla_x \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)}$$

$$\begin{aligned}
& + k_o^2 \sum_{t=1}^T \overline{(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& - \sum_{t=1}^T \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& - \sum_{t=1}^T \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& - \beta^2 \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{z,k} \varphi_k^{(t)} \right] d\Delta^{(t)} \\
& = i\beta \sum_{t=1}^T \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \left[\sum_{k=1}^{N_p} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] \right\} d\Delta^{(t)}, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

con $j = 1, \dots, N_i$, siendo N_i el número total de nodos incógnitas y donde $d\Delta^{(t)}$ representa el elemento diferencial de área del triángulo t.

Finalmente, las matrices y el vector \vec{F}_z quedarían para este ensamblaje simplificado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[M_z](j, k) & = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int [\nabla_x \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} + \nabla_y \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)}] d\Delta^{(t)} \\
& = - \sum_{t=1}^{T_{jk}} [b_j^{(t)} b_k^{(t)} + c_j^{(t)} c_k^{(t)}] \int 1 d\Delta^{(t)}, \\
[K_{oz}](j, k) & = \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& = \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{(n^2)^{(t)}} \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (a_j^{(t)} b_k^{(t)} + b_j^{(t)} a_k^{(t)}) \int x d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + (a_j^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} a_k^{(t)}) \int y d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + c_j^{(t)} b_k^{(t)} \right) \int xy \, d\Delta^{(t)} \Big\} ,$$

$$\begin{aligned} [L_{1z}](j, k) &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_x \varphi_k^{(t)} \, d\Delta^{(t)} \\ &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} b_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} \, d\Delta^{(t)} \\ &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} b_k^{(t)} \left(a_j^{(t)} \int 1 \, d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x \, d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y \, d\Delta^{(t)} \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L_{2z}](j, k) &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \int \varphi_j^{(t)} \nabla_y \varphi_k^{(t)} \, d\Delta^{(t)} \\ &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} c_k^{(t)} \int \varphi_j^{(t)} \, d\Delta^{(t)} \\ &= - \sum_{t=1}^{T_{jk}} \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} c_k^{(t)} \left(a_j^{(t)} \int 1 \, d\Delta^{(t)} + b_j^{(t)} \int x \, d\Delta^{(t)} + c_j^{(t)} \int y \, d\Delta^{(t)} \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B_z](j, k) &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} \, d\Delta^{(t)} \\ &= \sum_{t=1}^{T_{jk}} \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 \, d\Delta^{(t)} \right. \\ &\quad \left. + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x \, d\Delta^{(t)} \right. \\ &\quad \left. + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y \, d\Delta^{(t)} \right. \\ &\quad \left. + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 \, d\Delta^{(t)} \right. \\ &\quad \left. + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 \, d\Delta^{(t)} \right. \\ &\quad \left. + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy \, d\Delta^{(t)} \right\} , \end{aligned}$$

$$\vec{F}_z(j) = \sum_{t=1}^{T_j} \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{N_j^t} H_{x,k} \varphi_k^{(t)} \right] \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{k=1}^{N_j^t} H_{y,k} \varphi_k^{(t)} \right] \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \Bigg\} d\Delta^{(t)} \\
& = \sum_{t=1}^{T_j} \int \varphi_j^{(t)} \left\{ \left[H_{x,j} \varphi_j^{(t)} + H_{x,k} \varphi_k^{(t)} + H_{x,l} \varphi_l^{(t)} \right] \overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} \right. \\
& \quad \left. + \left[H_{y,j} \varphi_j^{(t)} + H_{y,k} \varphi_k^{(t)} + H_{y,l} \varphi_l^{(t)} \right] \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} \right\} d\Delta^{(t)} \\
& = \sum_{t=1}^{T_j} \left(\overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} H_{x,j} + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} H_{y,j} \right) \int \varphi_j^{(t)} \varphi_j^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left(\overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} H_{x,k} + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} H_{y,k} \right) \int \varphi_j^{(t)} \varphi_k^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& \quad + \left(\overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} H_{x,l} + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} H_{y,l} \right) \int \varphi_j^{(t)} \varphi_l^{(t)} d\Delta^{(t)} \\
& = \sum_{t=1}^{T_j} \left(\overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} H_{x,j} + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} H_{y,j} \right) \left\{ a_j^{(t)} a_j^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} b_j^{(t)} + a_j^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} c_j^{(t)} + a_j^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + b_j^{(t)} b_j^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + c_j^{(t)} c_j^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(b_j^{(t)} c_j^{(t)} + b_j^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy d\Delta^{(t)} \right\} \\
& \quad + \left(\overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} H_{x,k} + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} H_{y,k} \right) \left\{ a_j^{(t)} a_k^{(t)} \int 1 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} b_k^{(t)} + a_k^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} c_k^{(t)} + a_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + b_j^{(t)} b_k^{(t)} \int x^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + c_j^{(t)} c_k^{(t)} \int y^2 d\Delta^{(t)} \right. \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(b_j^{(t)} c_k^{(t)} + b_k^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy \, d\Delta^{(t)} \Big\} \\
& + \left(\overline{\nabla_x \ln(n^2)^{(t)}} H_{x,l} + \overline{\nabla_y \ln(n^2)^{(t)}} H_{y,l} \right) \left\{ a_j^{(t)} a_l^{(t)} \int 1 \, d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} b_l^{(t)} + a_l^{(t)} b_j^{(t)} \right) \int x \, d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(a_j^{(t)} c_l^{(t)} + a_l^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int y \, d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + b_j^{(t)} b_l^{(t)} \int x^2 \, d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + c_j^{(t)} c_l^{(t)} \int y^2 \, d\Delta^{(t)} \right. \\
& \quad \left. + \left(b_j^{(t)} c_l^{(t)} + b_l^{(t)} c_j^{(t)} \right) \int xy \, d\Delta^{(t)} \right\},
\end{aligned}$$

con $j = 1, \dots, N_i$ y $k \in V_j$ siendo V_j el conjunto de vecinos de la incógnita j (asociada con el j -ésimo nodo) y donde T_{jk} es el número de triángulos a los que la incognita j (asociada con el j -ésimo nodo) y la incógnita k (asociada con el k -ésimo nodo) pertenecen, N_{jk}^t es el número de vecinos que tienen las incógnitas j y k en el triángulo t y N_i es el número de nodos incógnitas.

3.2.3. Resolución de las ecuaciones

La implementación de la sección anterior nos conduce a la resolución de un problema típico (generalizado) de autovalores para el cálculo de las componentes transversales: $[A]\vec{H} = \beta^2[B]\vec{H}$. Para la resolución de este tipo de problemas se encuentra implementado en la PDEToolbox el algoritmo de Arnoldi [8]. Éste algoritmo busca autovalores de un problema en un intervalo dado $[l_b, u_b]$ de forma iterativa. En primer lugar, se toma un valor μ en el intervalo de búsqueda de autovalores, y se sustraen $\mu[B]\vec{H}$ de la ecuación anterior, que reordenando da lugar a:

$$([A] - \mu[B])^{-1}[B]\vec{H} = \frac{1}{\beta^2 - \mu}\vec{H}, \quad (3.39)$$

que corresponde a un problema estándar de autovalores de la forma $[A^*]\vec{H} = \theta\vec{H}$. Una vez resuelto, los autovalores del problema original se pueden hallar mediante $\beta_i^2 = \mu + 1/\theta_i$. Para más información acerca de este algoritmo, ver referencia [9].

Para el cálculo de la componente longitudinal únicamente habrá que resolver un sistema lineal para cada modo o valor de β de la forma:

$$[A_z(\beta)] \vec{H}_z = \vec{F}_z (\beta; h_x; h_y), \quad (3.40)$$

que resolveremos:

$$\vec{H}_z = [A_z(\beta)]^{-1} \cdot \vec{F}_z (\beta; h_x; h_y). \quad (3.41)$$

3.3. Integrales en coordenadas baricéntricas

Para realizar las integrales en los triángulos, resultado de la implementación del método de Elementos Finitos aquí desarrollado, de una forma más sencilla y elegante se recurren a unas variables denominadas baricéntricas. Éstas surgen definiendo en el triángulo t_n un nuevo origen de coordenadas y refiriendo los otros dos vértices del triángulo a éste. Sea t_n un triángulo cualquiera de la estructura con $P_I^{(n)}, P_{II}^{(n)}$ y $P_{III}^{(n)}$ sus tres vértices con coordenadas $(x_I^{(n)}, y_I^{(n)}), (x_{II}^{(n)}, y_{II}^{(n)})$ y $(x_{III}^{(n)}, y_{III}^{(n)})$, respectivamente. Si elegimos como nuevo origen de coordenadas el vértice $P_I^{(n)}$ (se puede hacer indistintamente con cualquier otro) los vectores (no unitarios) que definen nuestro nuevo sistema de coordenadas son:

$$\vec{\xi}^{(n)} = \begin{pmatrix} \xi_x^{(n)} \\ \xi_y^{(n)} \end{pmatrix} = P_{II}^{(n)} - P_I^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{II}^{(n)} - x_I^{(n)} \\ y_{II}^{(n)} - y_I^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\vec{\eta}^{(n)} = \begin{pmatrix} \eta_x^{(n)} \\ \eta_y^{(n)} \end{pmatrix} = P_{III}^{(n)} - P_I^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{III}^{(n)} - x_I^{(n)} \\ y_{III}^{(n)} - y_I^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

De esta forma cualquier punto $P^{(n)}$ de coordenadas x, y perteneciente al triángulo t_n se podrá poner como:

$$P^{(n)} = P_I^{(n)} + \alpha \vec{\xi}^{(n)} + \beta \vec{\eta}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_I^{(n)} \\ y_I^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \xi_x^{(n)} \\ \xi_y^{(n)} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \eta_x^{(n)} \\ \eta_y^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq \alpha + \beta \leq 1.$$

Asimismo cualquier integral de una función integrable $f(x, y)$ que hagamos en el triángulo t_n resulta en

$$\begin{aligned} I &= \int f(x, y) d\Delta^{(t_n)} = |J_n| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} f(P_I^{(n)} + \alpha \vec{\xi}^{(n)} + \beta \vec{\eta}^{(n)}) d\beta \right] d\alpha \\ &= |J_n| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} f(x_I^{(n)} + \alpha \xi_x^{(n)} + \beta \eta_x^{(n)}, y_I^{(n)} + \alpha \xi_y^{(n)} + \beta \eta_y^{(n)}) d\beta \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde $|J_n|$ denota el valor absoluto del Jacobiano de la transformación que, en nuestro caso, se corresponde con el doble del área del triángulo, es decir,

$$|J_n| = 2\Delta^{(t_n)},$$

puesto que la matriz Jacobiana tiene la forma

$$[J_n] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x^{(n)} & \xi_y^{(n)} \\ \eta_x^{(n)} & \eta_y^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

y el área del triángulo viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta^{(t_n)} &= \frac{\|\vec{\zeta}^{(n)} \times \vec{\eta}^{(n)}\|_2}{2} = \frac{\left\| \left(\xi_x^{(n)} \eta_y^{(n)} - \xi_y^{(n)} \eta_x^{(n)} \right) \hat{\zeta} \right\|_2}{2} = \frac{\sqrt{|\xi_x^{(n)} \eta_y^{(n)} - \xi_y^{(n)} \eta_x^{(n)}|^2}}{2} \\ &= \frac{|\xi_x^{(n)} \eta_y^{(n)} - \xi_y^{(n)} \eta_x^{(n)}|}{2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde $\hat{\zeta}$ constituye un vector unitario perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{\xi}^{(n)}$ y $\vec{\eta}^{(n)}$ y $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclídea.

En el apéndice A se resuelven todas y cada una de las integrales de las funciones polinómicas necesarias para la implementación del método de Elementos Finitos aquí desarrollado.

3.4. Condiciones de contorno absorbentes: Perfectly Matched Layer

Para problemas de dominio infinito o no acotados, el uso de las condiciones de contorno clásicas, tales como condiciones Dirichlet, Neumann o Robin, suponen la necesidad de truncar el dominio en el cuál se estudia un problema. Este truncamiento, inexistente en la realidad física, puede dar ciertos problemas debido a que se produce un efecto de reflexión en el contorno del problema a resolver. Este efecto es, especialmente, importante en el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas, ya que puede dar lugar a modos de vibración en lugares donde no se dan realmente.

Las condiciones de contorno absorbentes aparecen como alternativa a las condiciones tradicionales para paliar este perjudicial efecto. La idea consiste en simular el ambiente físico de forma que se produzca el efecto de absorber energía, tal como ocurre con el ambiente en la realidad, y así, a pesar del truncamiento necesario para estudiar el problema numéricamente, se puede conseguir que su comportamiento evite los efectos reflexivos comentados anteriormente.

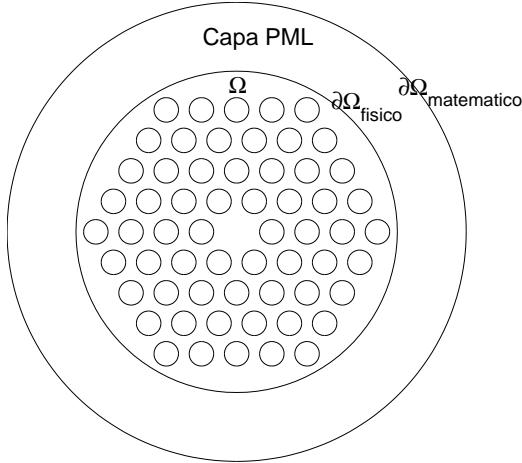


Figura 3.3: Capa absorbente (PML) introducida en un problema de cristales fotónicos para evitar el efecto de reflexión debido a las condiciones de contorno del problema. La zona exterior es la capa absorbente, mientras que la zona interior (Ω) es el dominio del problema físico a resolver.

3.4.1. Perfectly Matched Layer

El concepto de *Perfectly Matched Layer* (PML) fue introducido por Bérenguer [10, 11, 12, 13] merced a los estudios que éste llevó a cabo sobre la simulación de las ecuaciones de Maxwell para la transmisión de ondas electromagnéticas. La idea de Bérenguer consiste en recluir el dominio del problema por una capa que absorba energía (ver figura 3.3) de modo que la reflexión debido al truncamiento del dominio no tenga efecto en el resultado del problema.

Este concepto de condición de contorno tipo PML es independiente del método que usemos para la resolución de la ecuación diferencial.

La absorción de energía por parte de la PML se consigue mediante un cambio de variable en el problema [14, 15]. Así, introduciendo una componente compleja en los coeficientes del problema a resolver se produce un decaimiento exponencial en el valor del campo en esa zona. El nombre de *Perfectly Matched Layer* procede del uso de una función para la componente compleja que vaya desde cero en el contorno del problema hasta un valor máximo en el contorno de la PML (zona donde se trunca el problema). Para el caso que nos ocupa, se puede usar un coeficiente con parte real el índice de refracción del aire ($n = 1$) o el del propio revestimiento, y como parte compleja un valor que se estimará a partir de los resultados que se obtengan en la simulación del problema. Esta es una forma de sustituir el infinito por una capa finita, donde se impondrán condiciones de contorno habituales (Dirichlet, Neumann, etc) con lo que no se evita el efecto de reflexión del contorno; sin embargo, al haber una absorción de la energía, esto no afecta al resultado del problema para una PML suficientemente grande.

La formulación original de Bérenguer consistía en pasar un problema, no limitado en la variable x , del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y realizar la siguiente sustitución:

$$\partial/\partial x \longrightarrow \alpha\partial/\partial x \quad (3.48)$$

donde α es una función que toma la forma:

$$\alpha(x) = \frac{-i\omega}{-i\omega + \sigma(x)} \quad (3.49)$$

La función $\sigma(x)$ es real y positiva, siendo en el contorno del problema $\partial\Omega$, $\sigma(x) = 0$, luego $\alpha(x) = 1$, obteniéndose para la ecuación de Helmholtz escalar de un problema infinito en x :

$$\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_0^2 n^2(\vec{x})u = \beta^2 u \quad (3.50)$$

definido en Ω .

El problema que nos ocupa es infinito en la variable polar r por lo que hemos de introducir la función compleja $\sigma(r)$ en nuestras ecuaciones. En los siguientes capítulos se desarrollará este concepto con más detenimiento. No obstante, en la figura 3.4 (a) se representa la función compleja $n^2(x, y)$ para una fibra óptica cualquiera mientras en (b) representamos la función $n^2(R)$ donde R es el radio de la fibra adimensionalizado con el radio exterior. Se puede observar como la función $\sigma(r)$ se extiende desde el valor del radio de la PML hasta el del radio exterior.

A partir de esta formulación, han sido desarrolladas por distintos autores nuevas formas de implementar la idea de la PML para las ecuaciones tanto de Helmholtz como de Maxwell, dando lugar a métodos más eficaces y de menor coste computacional (ver referencias [16, 17, 18]).

3.5. Condiciones de contorno periódicas

Debido a la periodicidad que presentan las estructuras sometidas a estudio en el presente proyecto es posible introducir en ellas condiciones de contorno periódicas. Éstas proponen que el valor de una magnitud en uno de los contornos es idéntico al del otro. En nuestro caso, habría que verlo como si la estructura se cerrase formando un cono y los contornos se solapasen en uno de ellos. De esta forma el campo magnético vectorial ($h_x(\vec{x}_t)$, $h_y(\vec{x}_t)$) será idéntico en los contornos por donde truncaremos la estructura.

Este tipo de condiciones tienen la ventaja principal de reducir el dominio de integración de las ecuaciones con lo que se reduce el coste computacional (ver figura 3.5). Sin embargo, presentan el inconveniente de que las soluciones que se obtendrán sólo serán las compatibles con la simetría que estemos estudiando. Es por ello que la simulación de las fibras truncadas se aplica principalmente para la obtención de los modos fundamentales

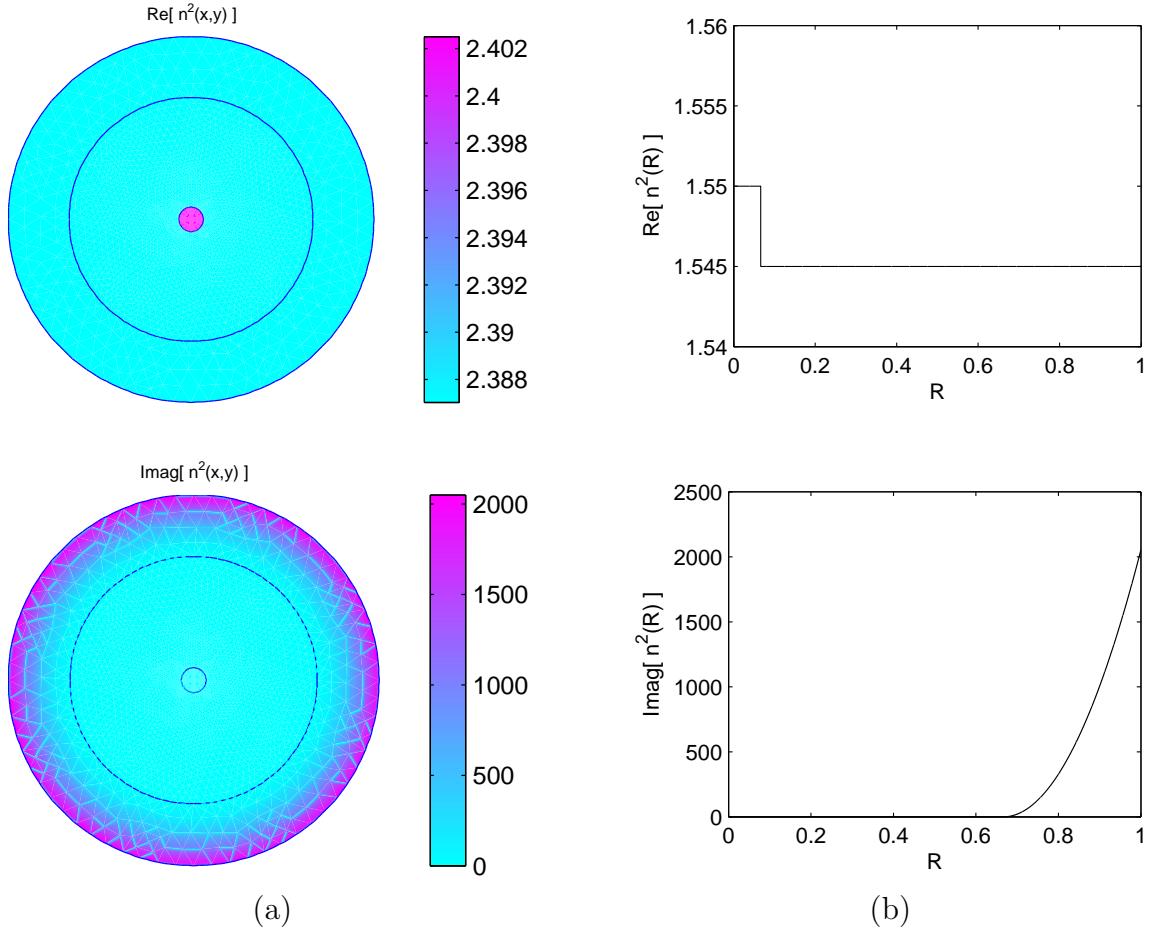


Figura 3.4: Cuadrado del índice de refracción complejo n para una fibra óptica con índices de refracción de 1.55 y 1.545 en el núcleo y en el revestimiento, respectivamente.

en las fibras. Además, se debe tener en cuenta a la hora del mallado que los nodos en un contorno periódico y en el otro deben corresponderse, es decir, deben poseer el mismo número de nodos y mantener la misma distancia al origen dos a dos, lo que no lo aseguraba el método de Delaunay de la PDEToolbox de MatLab. Sin embargo, se ha podido comprobar que, bajo ciertas condiciones, esto se puede lograr por lo que se han podido realizar simulaciones utilizando este tipo de condiciones de contorno.

Nótese que, para las fibras ópticas y para la fibras de Bragg, el grado de simetría es total mientras que en los cristales fotónicos este grado de simetría pasa a ser discreto obteniéndose estructuras $C_{60,n}$ con $n = 1, \dots, 6$ para las fibras hexagonales, por ejemplo. En la figura 3.5 (a) se muestra un sector de 60 grados que representa una geometría perteneciente al grupo C_1 (imagínese como un cono, mientras en (b) se muestra un semicírculo con geometría del grupo C_3 (visto como un cono).

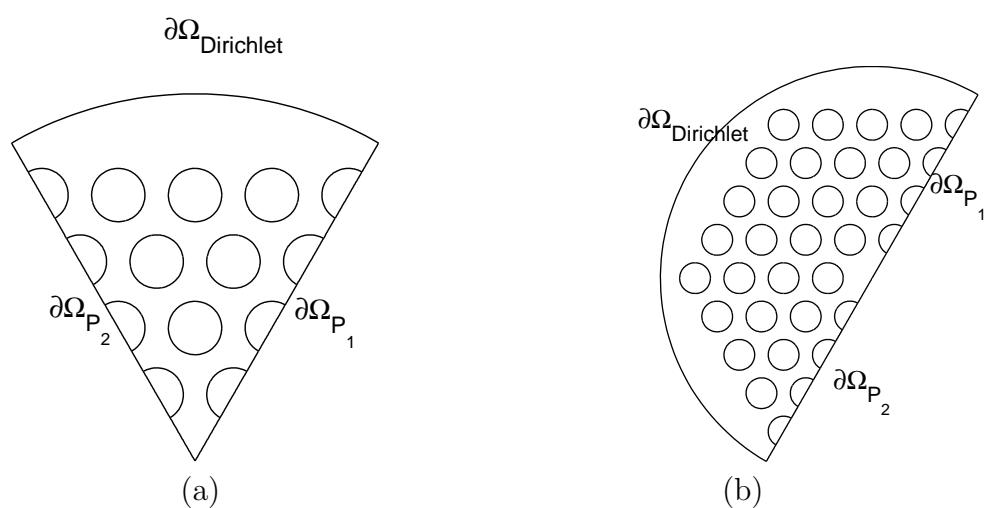


Figura 3.5: Geometrías truncadas de fibras de cristal fotónico donde se pueden distinguir cada uno de los diferentes contornos que la constituyen.

Capítulo 4

Fibras ópticas

4.1. Introducción

En el presente capítulo discutiremos la implementación del método desarrollado en el capítulo anterior, esto es, el método de los Elementos Finitos, aplicado a fibras ópticas. Estas fibras son usadas en la actualidad en multitud de tareas de comunicación, por lo que su comportamiento es bien conocido. Además, existen soluciones analíticas de la ecuación de Helmholtz para fibras ópticas [19, 20], de ahí que este capítulo esté orientado a la verificación de los métodos numéricos implementados para el posterior estudio de los modos en estructuras más complejas como son las fibras tipo Bragg y los cristales fotónicos.

La estructura del capítulo es la siguiente: en primer lugar se comentarán los fundamentos físico-matemáticos teóricos para este tipo de fibras. A partir de ellos, se deducirá la solución analítica. Posteriormente, se expondrá la implementación específica, para el caso de fibras ópticas, del método de los Elementos Finitos. Por último, se comentarán los resultados obtenidos, comparando entre sí las variantes del método implementado y la resolución analítica del problema.

4.2. Fundamentos teóricos de la fibra óptica

4.2.1. Fibras cilíndricas

Es posible el cálculo de la solución exacta de las ecuaciones de Maxwell para una fibra óptica cilíndrica con índice de refracción homogéneo en el núcleo y en el revestimiento.

Cálculo analítico de modos

Puesto que el estudio de fibra óptica viene determinado por dos dimensiones, se requieren dos enteros ν y l para especificar el orden de cada uno de los modos. Es por ello, que para este tipo de fibras nos refiramos a los modos $TE_{\nu l}(E_z = 0)$ y $TM_{\nu l}(H_z = 0)$. Estos modos se corresponden con rayos meridionales que viajan en el interior de la fibra.

Sin embargo, pueden aparecer también en el interior de la fibra modos híbridos, donde E_z y H_z son no nulos. Estos modos, resultado de una propagación helicoidal de los rayos, se designan $HE_{\nu l}$ y $EH_{\nu l}$ dependiendo de qué componente de H o E tenga una mayor contribución al campo transversal. De esta manera, una descripción exacta de los modos de una fibra óptica es algo complicada.

Sin embargo, el análisis se simplifica cuando se considera fibra óptica para tareas de comunicación. Estas fibras satisfacen que la diferencia relativa del índice de refracción Δ , definida como

$$\Delta = \frac{n_c^2 - n_r^2}{n_c^2 + n_r^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{n_r}{n_c} \right)^2 \right], \quad (4.1)$$

donde n_c y n_r representan los índices de refracción del núcleo y el revestimiento respectivamente, es muy baja ($\Delta \ll 1$). En efecto, Δ suele ser inferior a 0,03 para fibras ópticas de comunicación. Por ello, se pueden dar soluciones aproximadas para el conjunto completo de modos $TE_{\nu l}$, $TM_{\nu l}$, $HE_{\nu l}$ y $EH_{\nu l}$ mediante dos componentes polarizadas linealmente. Estos modos polarizados linealmente (LP) no representan los modos exactos de la fibra en los modos fundamentales (modos de orden menor $\nu = 0$). Sin embargo, si Δ es muy pequeña, la pareja de modos $HE-EH$ se da con unas constantes de propagación casi idénticas. Estos modos se dicen que están degenerados. La superposición de estos modos degenerados caracterizados por una constante de propagación común se corresponde con un modo particular LP . Esta combinación lineal de los modos degenerados produce una simplificación en el análisis de las fibras ópticas. En la figura 4.1 se representa la correspondencia entre los modos LP y los reales.

La relación entre la designación tradicional de los modos TE , TM , HE y EH y la designación simplificada de los modos $LP_{\nu l}$ se muestran en la figura 4.2.

Escribimos las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= i\varepsilon\omega\vec{E}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -i\mu\omega\vec{H}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

en coordenadas cilíndricas para lo cual realizamos el siguiente cambio de variables:

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi), \quad z = z. \quad (4.3)$$

Cualquier campo vectorial $\vec{A}(x, y, z)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x, y, z) &= A_x(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_y(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_z(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= A_r(r, \phi, z) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} + A_\phi(r, \phi, z) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} + A_z(r, \phi, z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

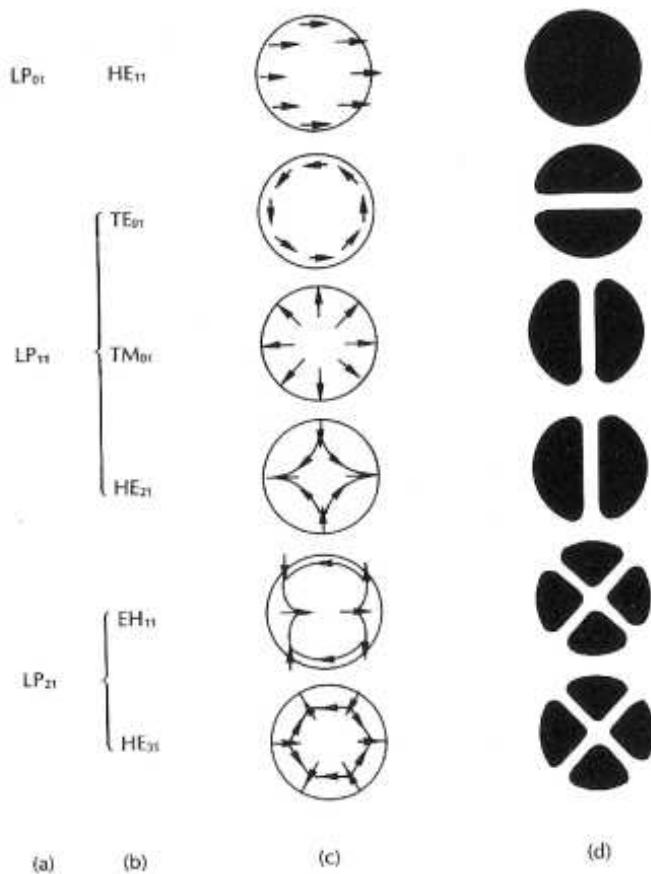


Figura 4.1: Configuraciones del campo eléctrico para los tres modos LP de orden más bajo ilustrados en términos de los modos exactos que los constituyen: (a) Designación de los modos LP ; (b) Designación de los modos exactos; (c) Distribución del campo eléctrico de los modos exactos; (d) Distribución de la intensidad de E_x de los modos exactos indicando el perfil de la intensidad del campo eléctrico para los correspondientes modos LP [19].

Linearly polarized	Exact
LP ₀₁	HE ₁₁
LP ₁₁	HE ₂₁ , TE ₀₁ , TM ₀₁
LP ₂₁	HE ₃₁ , EH ₁₁
LP ₀₂	HE ₁₂
LP ₃₁	HE ₄₁ , EH ₂₁
LP ₁₂	HE ₂₂ , TE ₀₂ , TM ₀₂
LP _{lm}	HE _{2m} , TE _{0m} , TM _{0m}
LP _{lm} ($l \neq 0$ or 1)	HE _{$l+1,m$} , EH _{$l-1,m$}

Figura 4.2: Correspondencia entre los modos polarizados linealmente de orden más bajo y los modos exactos tradicionales de los cuáles están formados [19].

por lo que

$$A_x = A_r \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi), \quad A_y = A_r \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi). \quad (4.5)$$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos para una función $H_z(x(r, \phi), y(r, \phi))$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\phi) \frac{\partial H_z}{\partial x} + \sin(\phi) \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial \phi} = \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} = -r \sin(\phi) \frac{\partial H_z}{\partial x} + r \cos(\phi) \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (4.7)$$

cuya inversión conduce a

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \cos(\phi) \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \sin(\phi) \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}. \quad (4.9)$$

Teniendo presente lo anterior observamos que todas las componentes transversales son función sólo de E_z y H_z ,

$$E_r = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \mu\omega \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right), \quad E_\phi = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (4.10)$$

$$H_r = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \varepsilon\omega \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right), \quad H_\phi = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \varepsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \quad (4.11)$$

donde $\kappa^2 = (k^2 - \beta^2) = (k_o^2 n^2 - \beta^2)$, las cuáles cumplen las ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - \beta^2 H_z = -k^2 H_z, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} - \beta^2 E_z = -k^2 E_z. \quad (4.13)$$

Aplicando separación de variables

$$E_z(r, \phi) = A f(r) \exp(i\nu\phi), \quad H_z(r, \phi) = B f(r) \exp(i\nu\phi), \quad (4.14)$$

obtenemos la ecuación diferencial de Bessel para el cálculo de $f(r)$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) f = 0, \quad (4.15)$$

donde la constante de propagación β de los modos guiados (integrada en κ) pertenecerá al rango

$$n_r k_o < \beta < n_c k_o. \quad (4.16)$$

Puesto que $H_z(r, \phi, z) = H_z(r, \phi + 2\pi, z)$, entonces

$$\exp[i\nu(2\pi)] = 1 \Rightarrow \nu \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (4.17)$$

La solución general de la ecuación de Bessel viene dada por

$$f(r) = A J_\nu(\kappa r) + B Y_\nu(\kappa r) \quad (4.18)$$

donde J_ν es la función de Bessel de primera clase e Y_ν es la función de Bessel de segunda clase (de Webber o Neumann), linealmente independiente de la primera. En la figura 4.3 se muestran estas funciones oscilatorias (con respecto a r).

Como el campo H debe ser finito en el eje de la fibra ($r = 0$), entonces B debe ser nulo ya que las funciones Y_ν no están definidas en el origen. Además, en el revestimiento la solución debe decaer a cero. Por tanto, la solución viene dada por:

$$f(R) = \begin{cases} G_1 J_\nu(UR), & R < 1 \quad (\text{núcleo}), \\ G_2 K_\nu(WR), & R > 1 \quad (\text{revestimiento}), \end{cases} \quad (4.19)$$

donde G_1 y G_2 son unos coeficientes de amplitud y $R = r/R_c$ es la coordenada radial adimensionalizada con el radio del núcleo, K_ν es la función de Bessel de primera clase modificada (ver figura 4.4) y U y W representan los autovalores en el núcleo y en el revestimiento respectivamente, viéndose definidos por

$$U = R_c \kappa = R_c \sqrt{(k_o^2 n_c^2 - \beta^2)}, \quad (4.20)$$

$$W = R_c \sqrt{(\beta^2 - k_o^2 n_r^2)}. \quad (4.21)$$

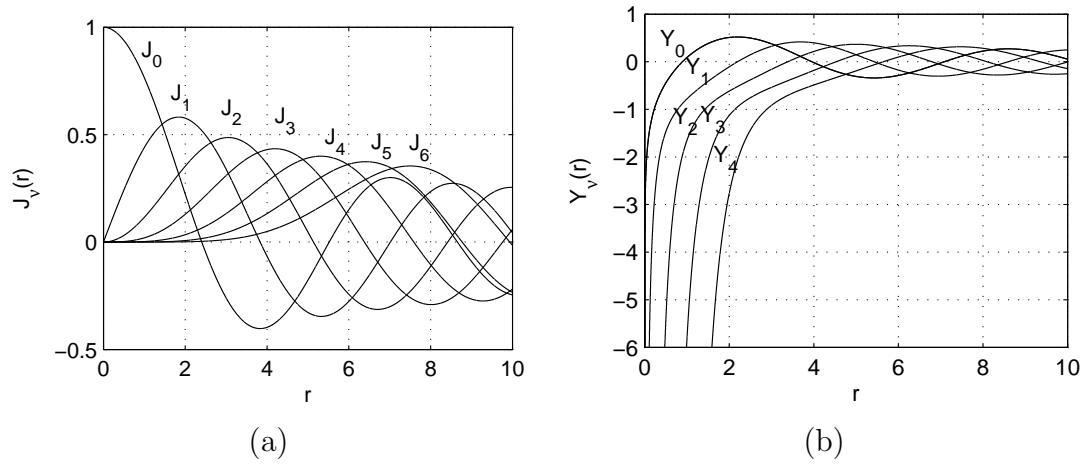


Figura 4.3: (a) Funciones de Bessel de primera clase $\nu = 1, 2 \dots 6$ en función de r . (b) Funciones de Bessel de segunda clase $\nu = 1, 2 \dots 4$ en función de r .

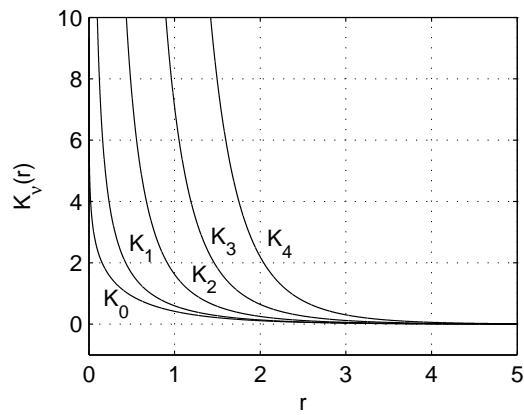


Figura 4.4: Funciones de Bessel de primera clase modificada $\nu = 1, 2 \dots 4$ en función de r .

donde R_c y R_r representan los radios del núcleo y del revestimiento (radio exterior) de la fibra.

Podemos relacionar G_1 y G_2 teniendo presente que el campo H ha de ser continuo en $R = 1$. Por ello:

$$G_1 J_\nu(U) = G_2 K_\nu(W) \quad \Rightarrow \quad G_2 = G_1 \frac{J_\nu(U)}{K_\nu(W)}. \quad (4.22)$$

Por tanto, la solución final para el campo $H_z(R, \phi)$ será:

$$H_z(R, \phi) = \begin{cases} G J_\nu(UR) \exp(i\nu\phi), & R < 1 \quad (\text{núcleo}), \\ G \frac{J_\nu(U)}{K_\nu(W)} K_\nu(WR) \exp(i\nu\phi), & R > 1 \quad (\text{revestimiento}), \end{cases} \quad (4.23)$$

La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de U y W definen una cantidad fundamental para el estudio de las fibras ópticas denominada frecuencia normalizada V , parámetro adimensional que, a veces, se le denomina número o valor de la fibra

$$V = \sqrt{(U^2 + W^2)} = k_o R_c (NA), \quad (4.24)$$

donde NA se denomina apertura numérica

$$NA = \sqrt{(n_c^2 - n_r^2)}. \quad (4.25)$$

Podemos combinar de una manera muy conveniente los tres parámetros fundamentales que caracterizan el comportamiento de una fibra óptica, a saber, el radio del núcleo R_c , la diferencia relativa del índice de refracción Δ y la longitud de onda de la señal portadora λ , para obtener la frecuencia normalizada V :

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} R_c n_c \sqrt{(2\Delta)}. \quad (4.26)$$

Es posible definir la constante de propagación normalizada b para una fibra en términos de los parámetros de la ecuación (4.26) como:

$$b = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{(\beta/k_o) - n_r^2}{n_c^2 - n_r^2} = \frac{(\beta/k_o) - n_r^2}{2n_c^2 \Delta}. \quad (4.27)$$

En la figura 4.5 se presenta la constante de propagación normalizada b para varios modos en función de la frecuencia normalizada V .

Refiriéndonos a la expresión dada para los modos propagantes en la ecuación, limitando β entre $k_o n_r$ y $k_o n_c$, concluimos que b se encuentra entre 0 y 1.

Las condiciones de contorno requieren la continuidad de las componentes transversales y longitudinales del campo en la interfase núcleo-revestimiento (en $r = R_c$). Por consiguiente, usando las relaciones entre las funciones de Bessel anteriormente expuestas, la ecuación para el cálculo de los autovalores de los modos lineales (modos LP) puede ser escrita de la forma siguiente:

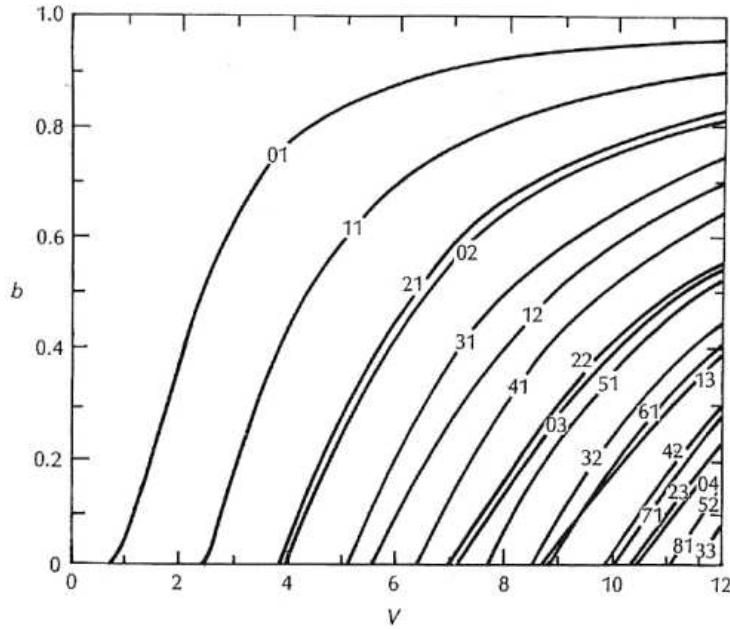


Figura 4.5: Constante de propagación normalizada b como función de la frecuencia normalizada para un número de modos LP [19].

$$U \frac{J_{\nu \pm 1}(U)}{J_{\nu}(U)} = \pm W \frac{K_{\nu \pm 1}(W)}{K_{\nu}(W)}. \quad (4.28)$$

La resolución de la ecuación (4.28) junto con las ecuaciones (4.20)-(4.21) permiten calcular los autovalores U y, por tanto, β como función de la frecuencia normalizada. De esta manera, las características de propagación de varios modos y su dependencia con la longitud de onda y los parámetros de la fibra puede ser determinada. La ecuación anterior se usará como comprobación de la validez del método numérico que se va a implementar, comparando los autovalores hallados de forma numérica con los que nos proporciona la ecuación. De este modo tendremos una idea bastante clara de cómo de precisos y fiables van a ser los resultados que obtengamos para fibras que presenten una complejidad superior.

Considerando el límite de propagación modal cuando $\beta = k_o n_r$, entonces la velocidad de fase es igual a la velocidad de la luz en el revestimiento y, por ello, el modo no es propiamente propagante. En este caso, se dice que el modo ha sido cortado y el autovalor $W = 0$. Los modos radiantes o evanescentes tienen frecuencias por debajo de la frecuencia de corte ($\beta < k_o n_r$), y entonces W posee parte imaginaria. Sin embargo, existen modos por debajo de $k_o n_r$ pero muy cercanos a ella y en éstos las pérdidas de energía debidas a radiación son compensadas por un momento angular de barrera formado en las inmediaciones de la interfase núcleo-revestimiento. Las soluciones de la ecuación de onda dadas

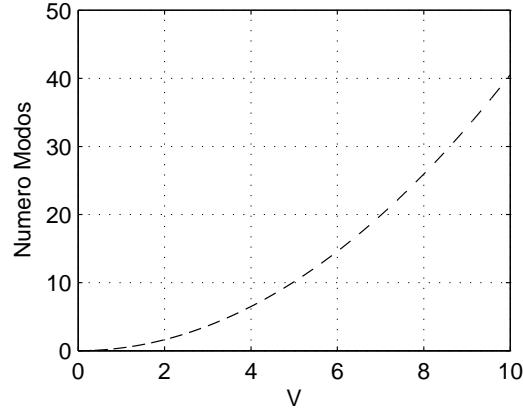


Figura 4.6: Función aproximada que da el número de modos propagantes en una fibra óptica de valor V .

en estas condiciones se denominan modos evanescentes. De otra forma, si β se incrementa desde $k_o n_r$, las pérdidas de potencia se propagan por el revestimiento hasta $\beta = k_o n_c$ donde toda la energía queda confinada en el núcleo. Como se mencionó anteriormente, este rango de valores para β proporciona los modos propagantes de la fibra.

Se puede demostrar que el número total de modos propagantes o volumen modal M para una fibra óptica cualquiera está relacionado con la frecuencia normalizada V mediante la siguiente expresión aproximada:

$$M \approx \left(\frac{V}{\pi/2} \right)^2. \quad (4.29)$$

En la figura 4.6 se representa el número de modos o volumen modal M en función de V .

Comportamiento Monomodo

La principal ventaja de la propagación de un único modo en el interior de la fibra óptica es que la dispersión de la señal causada por la diferencia de desfases entre los distintos modos en una fibra multimodo se suprime en su totalidad. Por ello, para la transmisión monomodo, la fibra debe ser diseñada para permitir que se propague un único modo en su interior y todos los demás serán atenuados por absorción (*leakage*).

Para la operación monomodo, sólo el modo fundamental LP_{01} puede existir. Por tanto, el límite de la operación monomodo vendrá impuesto por el límite inferior de la propagación del modo LP_{11} . La frecuencia de corte para el modo LP_{11} ocurre cuando $V_c = 2,405$ (primer cero de la función J_0). Podemos concluir, pues, que la propagación

única del modo LP_{01} para una fibra óptica es posible si el valor de ésta se encuentra en el rango:

$$0 \leq V < 2,405. \quad (4.30)$$

Se debe notar que realmente existen dos modos con una polarización ortogonal en el rango dado. El término monomodo se aplica para la propagación de la luz en una polarización particular. Está claro que si se quiere ajustar la frecuencia normalizada para una fibra y que caiga dentro de este rango, se debe actuar en disminuir el radio del núcleo o la diferencia relativa del índice de refracción, el cuál suele ser inferior al 1% para las fibras monomodo.

Longitud de onda de corte

Se debe notar que, como consecuencia de la ecuación (4.26), la operación monomodo sólo ocurre a partir de una longitud de onda de corte teórica λ_c dada por:

$$\lambda_c = \frac{2\pi R_c n_c}{V_c} \sqrt{(2\Delta)} \quad (4.31)$$

donde V_c es la frecuencia normalizada de corte. Para unos parámetros de la fibra dados, λ_c es la longitud de onda a partir de la cual el comportamiento de la misma es monomodo. Dividiendo la ecuación (4.31) entre la (4.26) para una misma fibra obtenemos la relación inversa:

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{V}{V_c}. \quad (4.32)$$

Puesto que $V_c = 2,405$ para una fibra óptica, entonces la longitud de onda de corte viene dada por

$$\lambda_c = \frac{V\lambda}{2,405}. \quad (4.33)$$

Los sistemas de transmisión reales, generalmente, suelen operar cerca de la longitud de onda de corte efectiva para aumentar el confinamiento del modo fundamental pero a una distancia suficiente de ella como para que el modo de segundo orden LP_{11} no transmita potencia alguna.

Desfase de grupo y factor de desfase modal

El tiempo de tránsito o desfase de grupo para un pulso de luz que se propaga por la unidad de longitud de fibra es el inverso de la velocidad de grupo v_g . Por tanto:

$$\tau_g = \frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk}. \quad (4.34)$$

El índice de grupo de una onda plana uniforme propagándose en un medio homogéneo viene determinado por la ecuación siguiente:

$$N_g = \frac{c}{v_g}. \quad (4.35)$$

Por ello, para una fibra monomodo, es usual definir un índice de grupo efectivo N_{ge} como:

$$N_{ge} = \frac{c}{v_g}, \quad (4.36)$$

donde v_g es considerada la velocidad de grupo del modo fundamental de la fibra. Por tanto, el desfase de grupo específico del modo fundamental de la fibra será:

$$\tau_g = \frac{N_{ge}}{c}. \quad (4.37)$$

Además, el índice de grupo efectivo puede escribirse en términos del índice de refracción efectivo $n_{eff} = \beta/k_o$ como:

$$N_{ge} = n_{eff} - \lambda \frac{dn_{eff}}{d\lambda}. \quad (4.38)$$

Reordenando la ecuación (4.27), podemos expresar β en función de la diferencia relativa del índice de refracción Δ y la constante de propagación normalizada b por la siguiente expresión aproximada:

$$\beta = k_o \left[(n_c^2 - n_r^2) b + n_r^2 \right] \approx k_o n_r [1 + b\Delta]. \quad (4.39)$$

Aproximando Δ por $(n_c - n_r)/n_r$, para fibras con $\Delta \ll 1$, podemos usar la siguiente aproximación

$$\frac{n_c - n_r}{n_r} \approx \frac{N_{gc} - N_{gr}}{N_{gr}}, \quad (4.40)$$

donde N_{gc} y N_{gr} son los índices de grupo para las regiones del núcleo y del revestimiento de la fibra respectivamente. Sustituyendo la ecuación (4.39) para β en la ecuación (4.34) y usando la expresión aproximada dada por la ecuación (4.40), se obtiene el desfase de grupo por unidad de longitud como:

$$\tau_g = \frac{1}{c} \left[N_{gr} + (N_{gc} - N_{gr}) \frac{d(Vb)}{dV} \right]. \quad (4.41)$$

Si suponemos que las propiedades dispersivas del núcleo y del revestimiento son idénticas e ignoramos la dependencia de Δ con la longitud de onda, podemos escribir el desfase de grupo como:

$$\tau_g = \frac{1}{c} \left[N_{gr} + n_r \Delta \frac{d(Vb)}{dV} \right]. \quad (4.42)$$

El primer término de la ecuación (4.42) proporciona la dependencia con la longitud de onda del desfase de grupo causada cuando una onda plana uniforme se propaga en un medio infinito con un índice de refracción equivalente al del revestimiento de la fibra. Sin embargo, el segundo término que depende únicamente de propiedades de guiado de la fibra, viene determinado por el factor de desfase modal $\frac{d(Vb)}{dV}$, el cuál describe el cambio en el desfase de grupo causado por cambios en la distribución energética entre el núcleo y el revestimiento de la fibra. El factor de desfase de modo es un parámetro universal para la mayor parte de las teorías sobre fibras monomodo.

4.3. Implementación numérica del problema

4.3.1. PDEToolbox

El estudio de los modos normales de propagación en fibras ópticas se rige por la ecuación de Helmholtz vectorial(2.31) y que presenta la siguiente forma:

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2(\vec{x}) + [\nabla_t (\ln n^2) \times (\nabla_t \times \circ)] \right\} \vec{h}_t = \beta^2 \vec{h}_t \quad (4.43)$$

donde el número de onda β es la raíz cuadrada de los autovalores de la ecuación (4.43), k_o es el número de onda del vacío, cuyo valor es $k_o = \frac{2\pi}{\lambda}$, siendo λ la longitud de onda de la señal portadora. El coeficiente $n(\vec{x})$ es el índice de refracción del medio. Éste depende de las coordenadas del punto en cuestión, ya que el valor del mismo en el núcleo es distinto que en el revestimiento; de hecho, en el núcleo debe ser ligeramente mayor para que los modos de la onda electromagnética se encuentren recluidos en su interior (ver figura 4.7). Valores habituales de los índices de refracción del núcleo y del revestimiento son 1.5 y 1.49, 1.55 y 1.54, etc, respectivamente. Podemos definir el índice de refracción, aprovechando la simetría angular, en coordenadas polares de la siguiente forma:

$$n(r) = \begin{cases} n_c & r < R_{nucleo} \\ n_{inter} & r = R_{nucleo} \\ n_r & r > R_{nucleo} \end{cases} \quad (4.44)$$

donde r representa la distancia al origen del punto y viene dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.45)$$

Para la interfase podemos elegir como índice de refracción el del núcleo, el del revestimiento o una media geométrica que viene dada por:

$$\frac{1}{n_{inter}^2} = \frac{1}{n_c^2} + \frac{1}{n_r^2} \quad (4.46)$$

El empleo de una condición de contorno absorbente se hace necesaria para la simulación numérica de estas fibras, ya que en caso contrario se encuentran modos de vibración

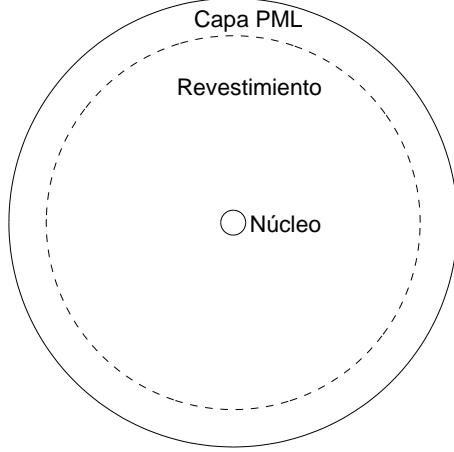


Figura 4.7: Corte transversal de una geometría de fibra óptica.

de las ondas en el revestimiento, algo que no se da en la realidad. Por tanto, se incluirá una capa PML en el revestimiento que absorba la energía de los modos que se van al exterior. El empleo de esta PML se ha elegido situarla en la zona exterior del revestimiento, a un radio aproximado de 10 veces el radio del núcleo, hasta el fin del dominio del problema. Esto es equivalente a suponer un revestimiento prácticamente infinito, que aunque en la realidad no sea así, es una forma de implementar la condición de que el radio del núcleo es mucho menor que el del revestimiento, consiguiendo que el problema tenga unas dimensiones menores, con el consiguiente ahorro computacional que supone.

Para conseguir esta capa tipo PML, se ha elegido introducir en el coeficiente n^2 de la ecuación (4.43) una componente compleja $\sigma(r)$, donde r es el radio, de modo que su valor sea cero en $r = R_{PML}$ (inicio de la capa PML) donde no hay absorción, y en ella siga una ley cuadrática hasta un valor σ_{max} en $r = R_{exterior}$ (este valor se encuentra alrededor de 3000 para el rango de longitudes de onda que nos preocupan). De este modo, la ecuación a resolver queda:

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 \left[n^2(\vec{x}) + i\sigma(\vec{x}) \right] + \left[\nabla_t(\ln n^2) \times (\nabla_t \times \circ) \right] \right\} \vec{h}_t = \beta^2 \vec{h}_t \quad (4.47)$$

donde

$$\sigma(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r \leq R_{PML} \\ \sigma_{max} \frac{(R_{exterior} - R_{PML})^2}{(r - R_{PML})^2} & R_{PML} < r \leq R_{exterior} \end{cases} \quad (4.48)$$

4.4. Resultados experimentales

En esta sección se estudiará la propagación de modos en fibras ópticas con el método de Elementos Finitos. Además, se compararán éstos con resultados analíticos del problema.

Para ello, se hallarán los primeros modos para una geometría dada en un rango de longitudes de onda que irá desde los 300 nm hasta los 1500 nm, que es el rango en el que se opera habitualmente. Se realizará una simulación cada 300 nm, ya que se considera un salto de longitudes de onda adecuado para observar los cambios que se producen. Asimismo, realizaremos simulaciones escalares y vectoriales observando las diferencias que pudieran existir entre ellas. Además, las primeras podremos compararlas con los estudios que hizo [2] usando la PDEToolbox.

4.4.1. Fibras multimodo

Como primera simulación, se ha usado un fibra multimodo estándar, con un radio interior de $10 \mu\text{m}$, y unos índice de refracción de 1.50 y 1.49 para el núcleo y para el revestimiento respectivamente. El parámetro σ_{max} introducido en la componente compleja de la ecuación de Helmholtz (4.47) para la capa PML toma un valor de $10^{17}/(\bar{k}_o)^2$, donde \bar{k}_o es el número de onda medio del rango en el que se simula. Esta elección está justificada para que la componente imaginaria del índice de refracción n , y con ello, todas las matrices del problema, no dependan, de la longitud de onda de la señal portadora. Se comprueba que con este valor se eliminan todos los modos existentes en esta zona.

En la figura 4.8 se muestra la forma que presenta todos los modos propagantes, hallados por el método numérico implementado en su versión vectorial ensamblaje normal, existentes en una fibra óptica determinada a una longitud de onda de 900 nm. (para otras longitudes de onda son muy similares). Las columnas impares representan el valor absoluto de H_x mientras que las columnas pares representan la misma magnitud para H_y . Nótese que el color negro representa la nulidad del campo. Todas las figuras de las simulaciones que se muestren a partir de ahora tendrán una configuración similar. No representamos los resultados obtenidos en la versión simplificada pues son del todo idénticos.

En la tabla 4.1 se dan los valores del índice de refracción para cada uno de los modos representados en la figura 4.8. La columnas correspondientes a \Re e \Im representan la parte real e imaginaria del modo, respectivamente. Esto será común para todas las tablas que se muestren a partir de aquí.

En la figura 4.9 mostramos los mismos modos que en la figura 4.8 pero resolviendo el problema escalar. Como se puede apreciar los resultados son muy similares pero la simulación vectorial muestra un mayor número de modos pues la simulación escalar produce la degeneración de los modos dos a dos.

En la tabla 4.2 se exponen los índices de refracción de la simulación escalar realizada. Se puede comprobar que son prácticamente idénticos a los resultados presentados en [2].

Por último, exponemos los resultados analíticos para la misma fibra.

La figura 4.11 (a) muestra el valor del índice de refracción efectivo ($n_{eff} = \frac{\beta}{k_o}$) del primer modo de la fibra para cada longitud de onda. Se obtuvo interpolando los valores que teníamos para las longitudes de onda simuladas.

En este caso, se ha incluido además el n_{eff} hallado de forma analítica. Vemos que

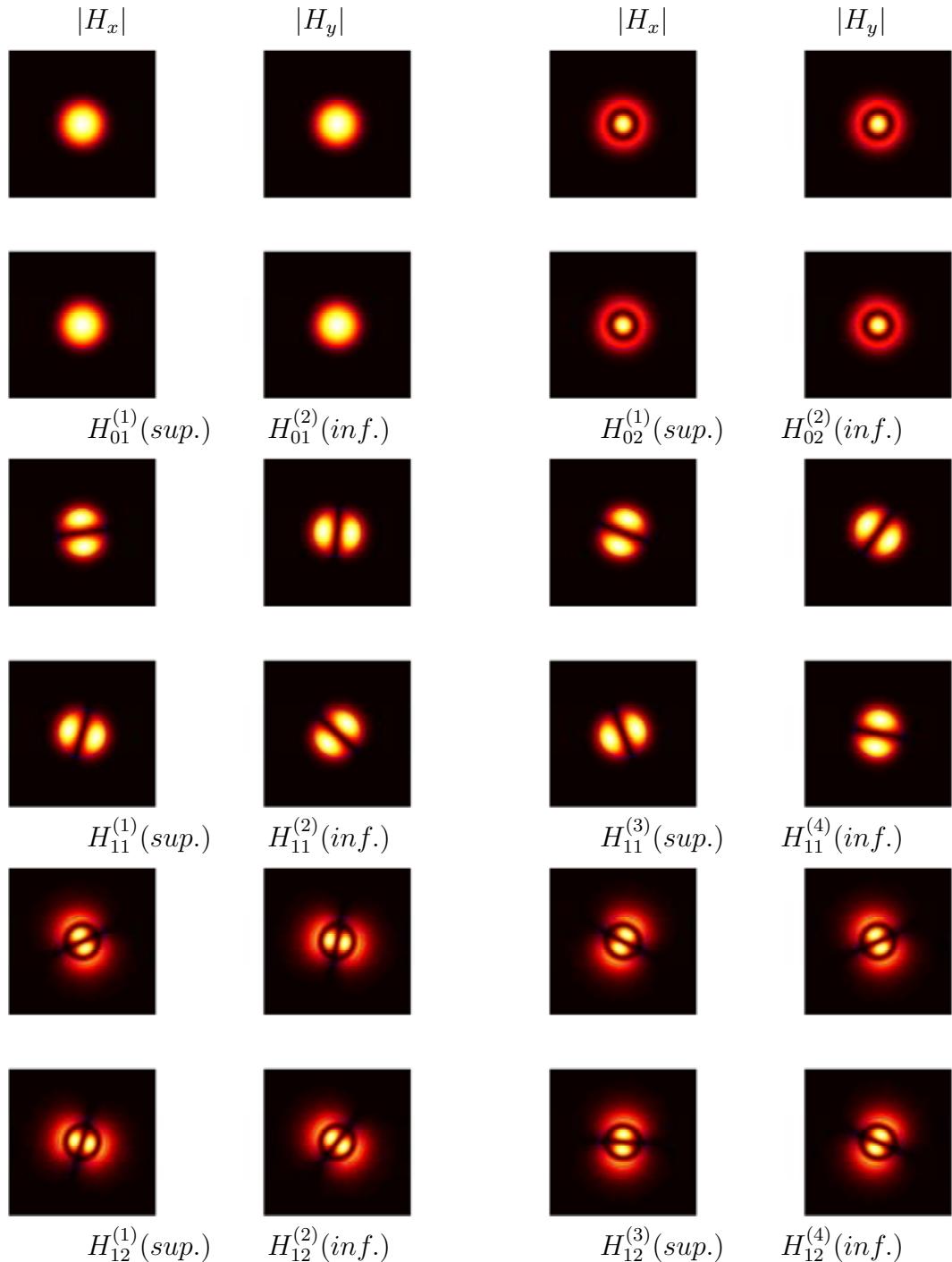


Figura 4.8: Modos normales de propagación en fibras ópticas hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.

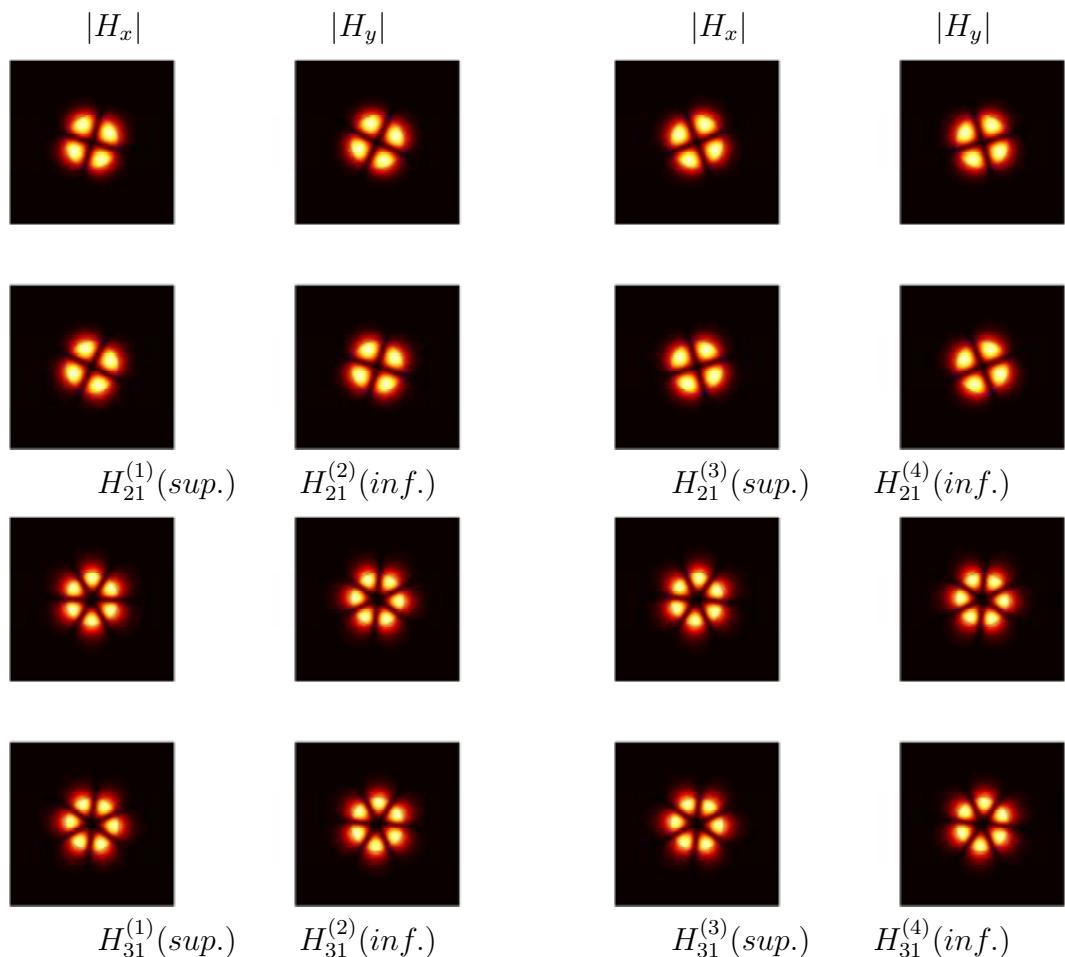


Figura 4.8 (continuación)

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,498881	$7,955986 \cdot 10^{-26}$
$H_{01}^{(2)}$	1,498881	$2,551583 \cdot 10^{-26}$
$H_{02}^{(1)}$	1,494280	$-2,995158 \cdot 10^{-25}$
$H_{02}^{(2)}$	1,494280	$-4,008999 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(1)}$	1,497184	$-5,205339 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(2)}$	1,497179	$-1,586484 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(3)}$	1,497179	$-2,973205 \cdot 10^{-27}$
$H_{11}^{(4)}$	1,497177	$-8,790466 \cdot 10^{-26}$
$H_{12}^{(1)}$	1,491141	$1,747467 \cdot 10^{-22}$
$H_{12}^{(2)}$	1,491137	$1,888183 \cdot 10^{-22}$
$H_{12}^{(3)}$	1,491131	$2,035268 \cdot 10^{-22}$
$H_{12}^{(4)}$	1,491129	$2,101156 \cdot 10^{-22}$
$H_{21}^{(1)}$	1,494997	$7,760032 \cdot 10^{-26}$
$H_{21}^{(2)}$	1,494997	$-7,029071 \cdot 10^{-28}$
$H_{21}^{(3)}$	1,494962	$1,006026 \cdot 10^{-25}$
$H_{21}^{(4)}$	1,494962	$-1,318624 \cdot 10^{-25}$
$H_{31}^{(1)}$	1,492358	$-3,414367 \cdot 10^{-26}$
$H_{31}^{(2)}$	1,492358	$2,700211 \cdot 10^{-26}$
$H_{31}^{(3)}$	1,492340	$-1,106608 \cdot 10^{-26}$
$H_{31}^{(4)}$	1,492340	$2,101156 \cdot 10^{-26}$

Tabla 4.1: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación vectorial realizada en la figura 4.8.

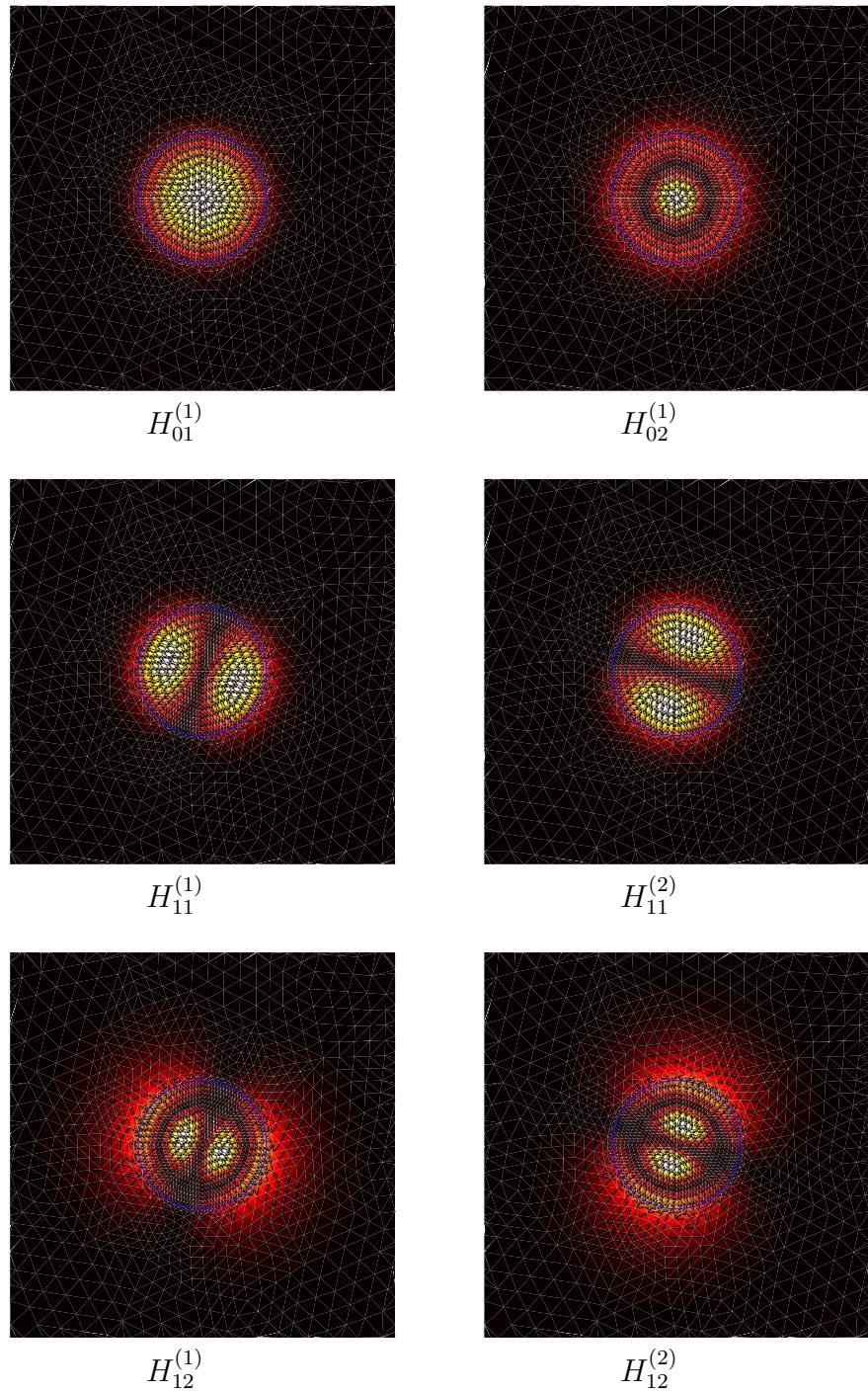


Figura 4.9: Modos normales de propagación en fibras ópticas hallado por el método escalar de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.

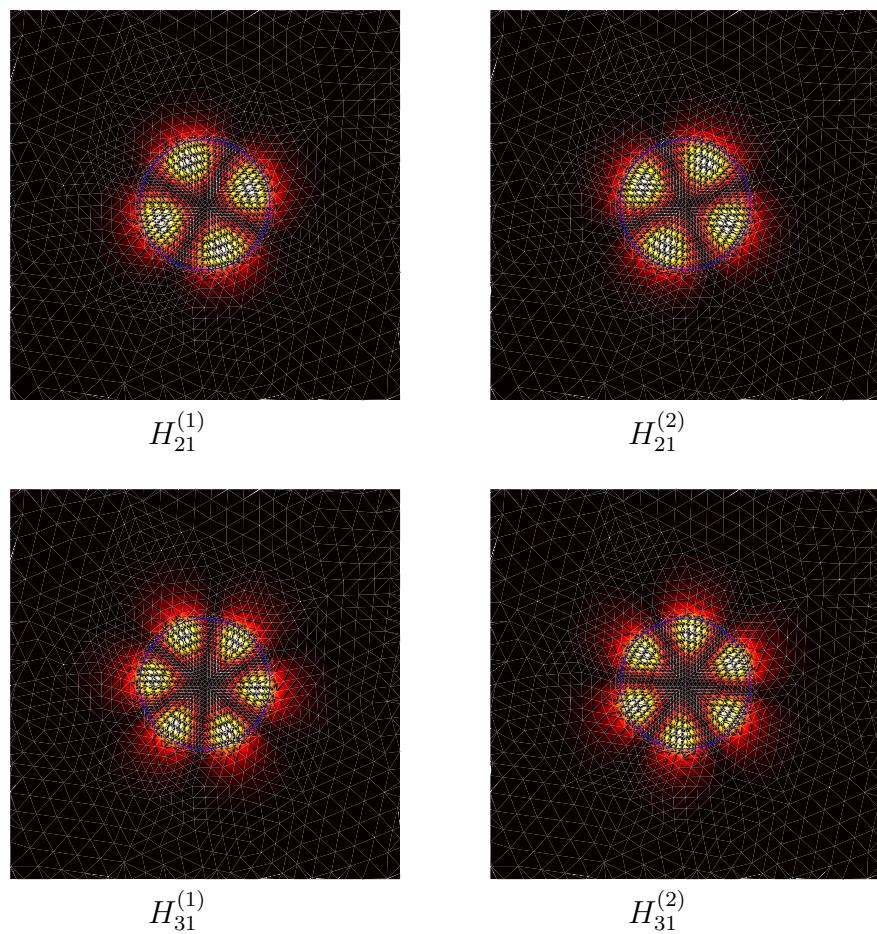


Figura 4.9 (continuación)

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,498883	$1,549698 \cdot 10^{-26}$
$H_{02}^{(1)}$	1,494287	$2,399542 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(1)}$	1,497185	$-1,015109 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(2)}$	1,497183	$-2,200135 \cdot 10^{-26}$
$H_{12}^{(1)}$	1,491143	$1,686881 \cdot 10^{-22}$
$H_{12}^{(2)}$	1,491136	$1,869915 \cdot 10^{-22}$
$H_{21}^{(1)}$	1,495004	$-3,055045 \cdot 10^{-26}$
$H_{21}^{(2)}$	1,494969	$-9,201519 \cdot 10^{-26}$
$H_{31}^{(1)}$	1,492364	$-5,664484 \cdot 10^{-26}$
$H_{31}^{(2)}$	1,492352	$-6,000588 \cdot 10^{-27}$

Tabla 4.2: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación escalar presentada en la figura 4.9.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
LP_{01}	1,498842	0
LP_{02}	1,494095	0
LP_{11}	1,497085	0
LP_{12}	1,490895	0
LP_{21}	1,494821	0
LP_{31}	1,492129	0

Tabla 4.3: Valores del índice de refracción efectivo analítico n_{eff} .

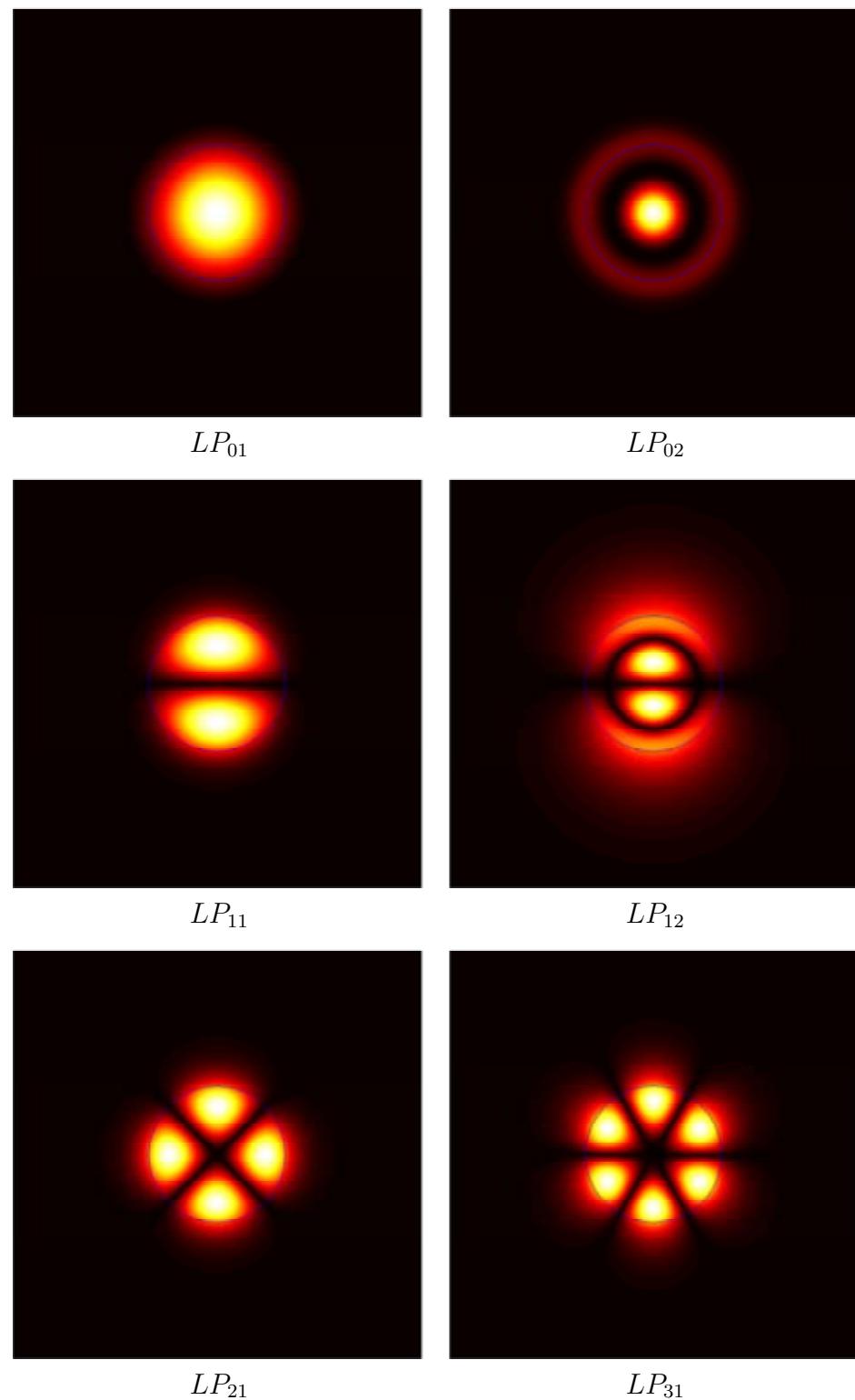


Figura 4.10: Modos normales de propagación analíticos en fibras ópticas, para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.

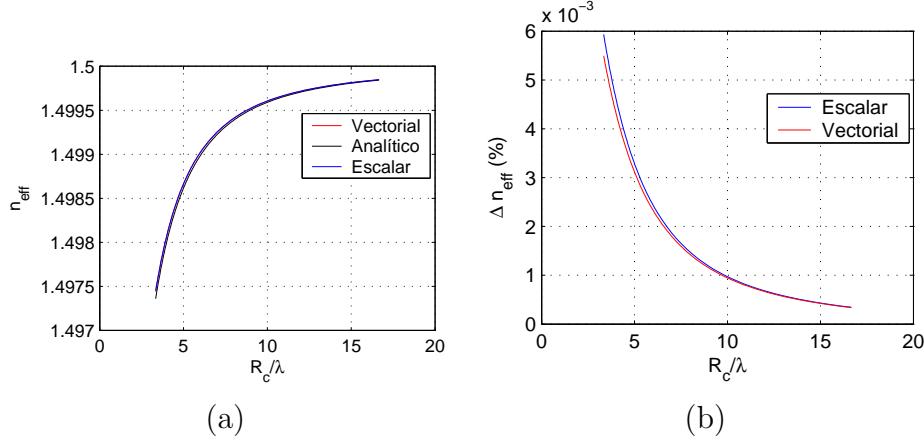


Figura 4.11: (a) Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (R_c/λ) para el método de los Elementos Finitos y la solución analítica. (b) Error en % cometido en cada método respecto a la solución analítica.

presenta una tendencia asintótica hacia el valor del índice de refracción del núcleo al aumentar la frecuencia normalizada.

Si comparamos los resultados de ambos métodos con los de la solución exacta, se observa que los valores del n_{eff} hallados están bastante próximos entre sí. La figura 4.11 (b) muestra el error relativo cometido por ambos. Este error no supera el 0,006 % para ninguna de las longitudes de onda, lo que supone un resultado bastante bueno. Asimismo, se muestra que la exactitud es mayor conforme menor es la longitud de onda de la señal portadora.

Por otro lado, se observa que se dan modos en el revestimiento para valores de $\beta < (k_o n_r)^2$, con la forma que indica la figura 4.12. Estos modos se puede comprobar que son evanescentes, es decir, son modos cuya propagación se da durante un tiempo mucho menor al del modo principal. Esto se puede ver atendiendo a la componente imaginaria del n_{eff} hallada (o el número de onda β). Para el caso de los modos principales, ésta tiene un valor del orden de 10^{-25} , mientras que para los modos que se dan en el revestimiento (figura 4.12), su valor asciende a 10^{-9} aproximadamente, lo que supone una diferencia considerable de órdenes de magnitud (10^{16}).

Al ser las soluciones de la forma (ver sección 2.4)

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{h}(\vec{x}_t) \exp(-i\beta z), \quad (4.49)$$

la existencia de una componente compleja en $\beta = \beta_r - ai$, donde a se llama factor de atenuación, produce una absorción de energía, ya que

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{h}(\vec{x}_t) \exp(-i\beta z) = \vec{h}(\vec{x}_t) \exp(-az) \exp(-i\beta_r z). \quad (4.50)$$

El término $\exp(-az)$ crea una atenuación exponencial de la onda. Al ser el valor de a

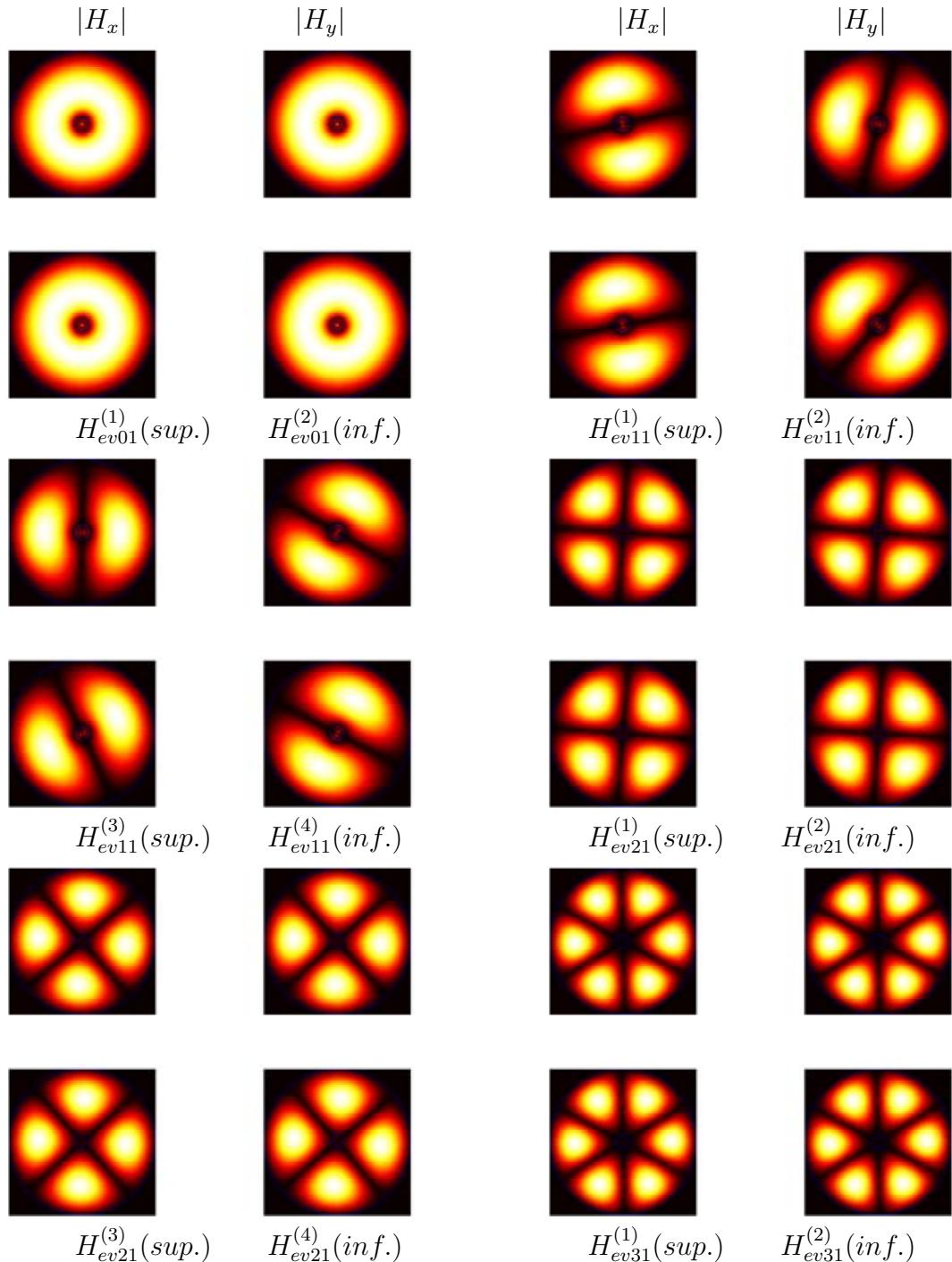


Figura 4.12: Modos normales evanescentes en fibras ópticas hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el núcleo de 1.5 y en el revestimiento de 1.49, a una longitud de onda de 900 nm.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{ev01}^{(1)}$	1,489981	$6,139591 \cdot 10^{-9}$
$H_{ev01}^{(2)}$	1,489980	$6,139615 \cdot 10^{-9}$
$H_{ev11}^{(1)}$	1,489956	$8,718243 \cdot 10^{-9}$
$H_{ev11}^{(2)}$	1,489956	$8,712936 \cdot 10^{-9}$
$H_{ev11}^{(3)}$	1,489956	$8,716427 \cdot 10^{-9}$
$H_{ev11}^{(4)}$	1,489956	$8,712454 \cdot 10^{-9}$
$H_{ev21}^{(1)}$	1,489926	$1,350091 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(2)}$	1,489926	$1,350091 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(3)}$	1,489926	$1,349029 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(4)}$	1,489926	$1,349030 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev31}^{(1)}$	1,489887	$2,088198 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev31}^{(2)}$	1,489887	$2,087844 \cdot 10^{-8}$

Tabla 4.4: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos evanescentes representados en la figura 4.12.

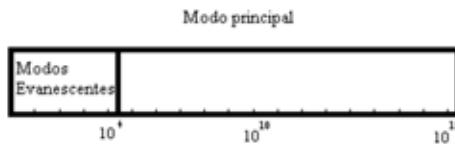


Figura 4.13: Espacio relativo que recorre el primer modo principal y el primer modo evanesciente en la fibra óptica representada en la figura 4.8 [2].

en los modos evanescentes mucho mayor que en el modo principal, esto indica que decaen muy rápido en comparación con este último. Si nos centramos en el estudio de modos en la fibra sin tener en cuenta estos efectos transitorios, que sólo se dan en el principio de la fibra, podemos suponer que estos modos no se propagan, por lo que no se tendrán en cuenta a partir de ahora. En la figura 4.13 se representa con claridad este fenómeno.

En la figura 4.14 se muestra el n_{eff} para otra fibra, con valores distintos del índice de refracción del núcleo y revestimiento, y del radio del núcleo ($R_c = 15\mu m$, $n_c = 1,550$, $n_r = 1,545$). El comportamiento que se presenta es muy similar al anterior, obteniéndose de nuevo errores en % muy pequeños respecto a la solución analítica (del orden del 0.001 % aproximadamente).

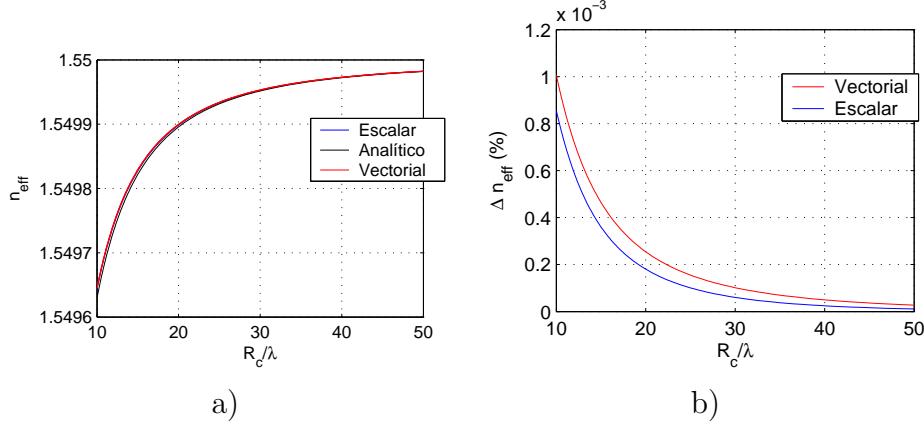


Figura 4.14: (a) Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (R_c/λ) para el método de los Elementos Finitos y la solución analítica. (b) Error en % cometido en cada método respecto a la solución analítica.

4.4.2. Fibras monomodo

Hasta ahora hemos estudiado una fibra multimodo en la que se propagan otros modos además del principal. Es de interés práctico el estudio de fibras monomodo, al estar en éstas toda la energía concentrada en un único modo.

Si observamos la ecuación (4.29), notamos que el número de modos aumenta con el radio del núcleo R_c y con la apertura numérica NA , y disminuye con la longitud de onda λ . Así pues, para conseguir una fibra monomodo se ha usado unos parámetros de: $R_c = 2,5\mu\text{m}$, $n_c = 1,550$, $n_r = 1,545$. Con estos valores, se observa que, a partir de una longitud de onda de aproximadamente 812.5 nm, sólo se produce la propagación del modo principal. Simulando vectorialmente la fibra monomodo anteriormente expuesta, se observa que los valores del índice de refracción efectivo siguen la misma tendencia que en los casos anteriores (figura 4.15) con la particularidad de una cierta linealidad con la frecuencia normalizada. No representamos el modo principal pues es idéntico al modo principal de las fibras ópticas vista hasta ahora.

4.5. Conclusiones

Como conclusión, podría decirse que el método de Elementos Finitos, tanto en su versión vectorial como en la escalar y en cada una de sus variantes, es bastante preciso para el cálculo de modos en fibras ópticas, como muestran los resultados. Por otro lado, se encuentra que el tiempo de computación es bastante más pequeño en el caso de la simulación escalar, como es obvio pues se maneja la mitad de la información, que en la vectorial. Asimismo, podemos asegurar que la precisión del método aumenta con el

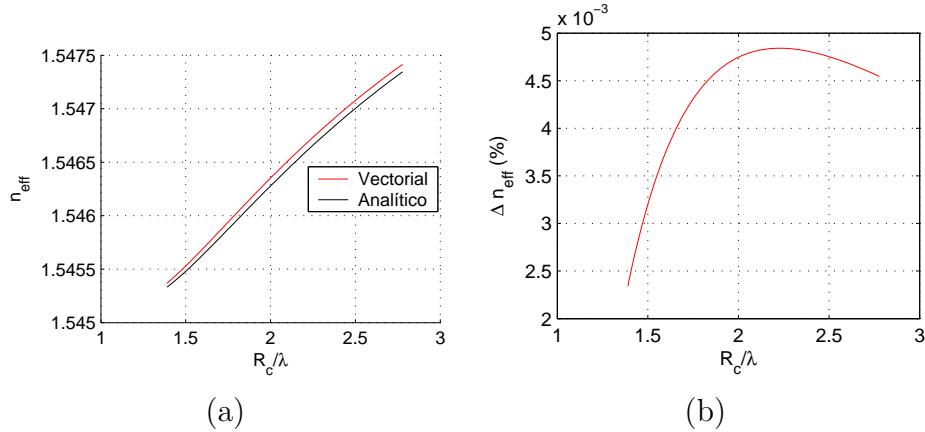


Figura 4.15: (a) Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (R_c/λ) para el método de los Elementos Finitos y la solución analítica. (b) Error en % cometido por el método vectorial respecto a la solución analítica.

número de nodos presentes en la malla. Obviamente esto trae consigo un aumento del tiempo de computación.

Capítulo 5

Fibras de Bragg

5.1. Introducción

La fibra de Bragg se puede considerar como una transición entre la fibra óptica y el cristal fotónico, debido a las similitudes que presenta con una y otra estructura. Por un lado, se tiene la simetría radial característica de las fibras ópticas, y por otro se tiene la presencia de huecos en el interior de la fibra. En el capítulo 5 se hablará sobre la implementación numérica, y se comentarán los resultados obtenidos mediante los métodos usados en el presente proyecto. Estos resultados serán comparados de cara a la comprobación de la validez del método de los Elementos Finitos para un caso distinto al de las fibras ópticas, ya que este método será el que se use para estudiar los modos normales de propagación en cristales fotónicos.

En el presente capítulo se comentará, en primer lugar, la implementación numérica del método de los Elementos Finitos para el caso de fibras tipo Bragg. Al ser muy similar a la implementación usada para fibras ópticas, sólo se comentarán los aspectos más significativos del método que cambian respecto a los comentados en el capítulo anterior (ver sección 4.3). Finalmente, se discutirán los resultados obtenidos, comparando entre sí ambos métodos.

5.2. Implementación numérica del problema

5.2.1. PDEToolbox

Para el estudio de los modos de propagación en fibras de Bragg mediante el método de los Elementos Finitos se seguirá el esquema usado en el capítulo anterior para fibras ópticas (sección 4.3.1), explicándose a continuación los cambios necesarios a realizar para la simulación de este tipo de fibras.

La ecuación a resolver será la misma que en el caso de las fibras ópticas, esto es, la ecuación de Helmholtz (2.31). En este caso, el valor del coeficiente $n(\vec{x})$, es decir, del índice de refracción, variará entre el valor del índice de refracción del aire en la zona

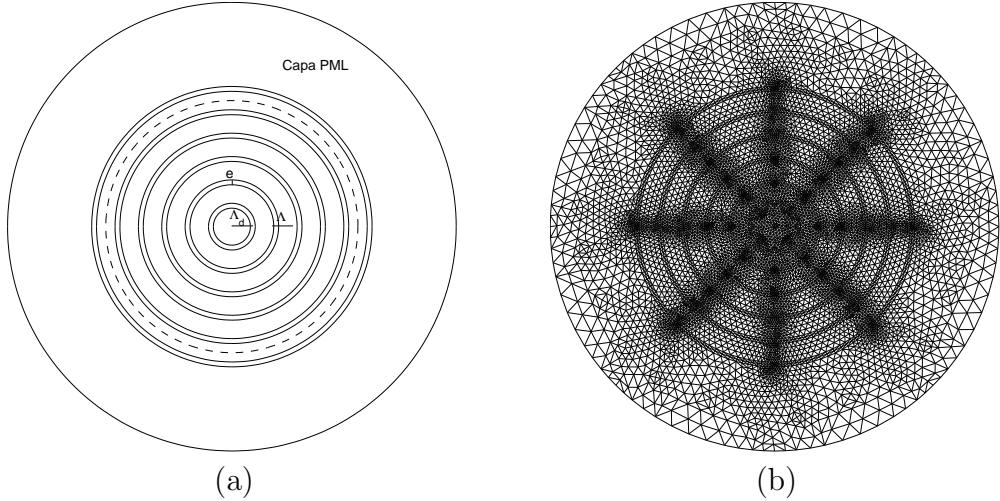


Figura 5.1: (a) Geometría de una fibra de tipo Bragg con $\Lambda_d = \Lambda$. En la zona exterior se encuentra la capa tipo PML, mientras en la zona interior tenemos la estructura de capas con huecos en forma de anillo. (b) Mallado de la geometría.

donde se encuentran los huecos de la geometría ($n_{aire} = 1$) y el índice de refracción del material del que está constituida la fibra, que suele estar en un rango $n \in [1,45, 1,55]$ (para el caso del silicio, será aproximadamente 1.46).

Al igual que en el caso de las fibras ópticas, se usará una condición de contorno absorbente para la simulación de fibras de Bragg. Se introducirá una capa PML para absorber energía de los modos que se van al exterior, y evitar así la reflexión de las condiciones de contorno del problema. Esta capa se colocará inmediatamente anterior al último anillo hueco como podemos ver en la figura 5.1. La PML se ha implementado del mismo modo que en fibras ópticas, introduciendo una componente compleja en la zona exterior del problema siguiendo una ley cuadrática entre cero y σ_{max} (ver ecuación 4.48).

Las funciones de la PDEToolbox necesarias para la simulación del problema son las mismas que en el caso de fibras ópticas (sección 4.3.1).

5.3. Resultados experimentales

Las fibras de Bragg no tienen una solución analítica sencilla, lo que dificulta su estudio de forma exacta. En cambio, su geometría presenta grandes similitudes con la de la fibra óptica (geometría circular, simetría, etc), lo que hace pensar que la solución obtenida con el método usado para fibras ópticas será de una precisión similar. En cualquier caso, se compararán los resultados obtenidos con los que se pueden encontrar en la bibliografía.

En primer lugar, se ha realizado una simulación de una fibra con una separación entre capas Λ igual al radio del defecto o núcleo de la fibra Λ_d , es decir, $\Lambda_d = \Lambda = 12\mu m$,

un espesor de capa e de $2\mu m$ y unos valores del índice de refracción de 1.46 y 1.00 para el silicio y el aire, respectivamente. El modo principal de propagación para este tipo de fibras tiene una forma muy similar al hallado en fibras ópticas, como se puede ver en la figura 5.2 en la que además hemos querido mostrar otros modos propagantes de la estructura. Si observamos detenidamente esta figura, podemos comprobar que parte del campo electromagnético se propaga por los anillos concéntricos al defecto; esto concuerda con los resultados obtenidos por otros autores [21, 22].

En la tabla 5.1 se muestran los valores del índice de refracción para esta fibra. Se puede observar que las pérdidas en algunos modos son superiores a las obtenidas en fibra óptica debido a la propagación de éstos por el “revestimiento”.

Por tanto, no se encuentra el modo recluido en el centro de la geometría, sino que el campo electromagnético se encuentra dispersado en los demás anillos. No obstante, este efecto de propagación entre capas se puede evitar si disminuimos la separación entre dos de ellas sucesivas sin disminuir la magnitud del “defecto”, como se puede comprobar en la figura 5.3 donde se ha disminuido el valor de Λ hasta el doble del espesor e manteniendo Λ_d . De esta forma, el campo no encuentra regiones tan grandes donde propagarse por lo que ha de hacerlo por el defecto. En este caso, tendríamos prácticamente una fibra óptica con una apertura numérica bastante elevada. Las pérdidas disminuyen debido al confinamiento de la energía por el defecto, como se muestra en la tabla 5.2.

Otro aspecto a tener en cuenta es que no se ha encontrado comportamiento monomodo en las fibras tipo Bragg, para cualquier longitud de onda y parámetros de geometría. Este comportamiento multimodo reduce considerablemente su interés práctico, al tener la energía distribuida en gran cantidad de modos.

En la figura 5.4 se puede observar la tendencia seguida por el índice de refracción efectivo principal n_{eff} . Su valor es muy similar a los disponibles en la bibliografía (referencia [22]).

En la figura 5.5 se puede observar los resultados obtenidos para otra geometría de fibra de Bragg.

Si se atiende a la distribución de los índice de refracción efectivo para varios modos distintos, se encuentra que esta distribución se da en una serie de bandas, existiendo bandas de n_{eff} donde no se encuentra ningún modo. Esta situación se encuentra reflejada en la figura 5.6. En ella podemos observar que entre el primer modo (línea superior) y el segundo modo hay una zona en blanco donde no se ha encontrado que se propague modo alguno. A continuación, se da una zona donde se encuentran gran cantidad de modos con n_{eff} similar, para posteriormente darse otra banda “prohibida” para la propagación de modos.

5.4. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos de la simulación de fibras de Bragg mediante el método de los Elementos Finitos, concluimos que éstos coinciden con los de la bibliografía

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01(0)}^{(1)}$	1,459955	$1,261604 \cdot 10^{-25}$
$H_{01(0)}^{(2)}$	1,459955	$5,551848 \cdot 10^{-26}$
$H_{01(1)}^{(1)}$	1,459923	$5,405184 \cdot 10^{-20}$
$H_{01(1)}^{(2)}$	1,459923	$5,524988 \cdot 10^{-20}$
$H_{11(1)}^{(1)}$	1,459920	$8,882363 \cdot 10^{-17}$
$H_{11(1)}^{(2)}$	1,459920	$7,748081 \cdot 10^{-17}$
$H_{01(2)}^{(1)}$	1,459922	$4,848348 \cdot 10^{-17}$
$H_{01(2)}^{(2)}$	1,459922	$4,803104 \cdot 10^{-17}$
$H_{11(2)}^{(1)}$	1,459921	$5,263360 \cdot 10^{-16}$
$H_{11(2)}^{(2)}$	1,459921	$4,940419 \cdot 10^{-16}$
$H_{11(2)}^{(3)}$	1,459921	$5,032036 \cdot 10^{-16}$
$H_{11(2)}^{(4)}$	1,459921	$4,719357 \cdot 10^{-16}$
$H_{01(3)}^{(1)}$	1,459921	$7,937097 \cdot 10^{-14}$
$H_{01(3)}^{(2)}$	1,459921	$8,001694 \cdot 10^{-14}$
$H_{11(3)}^{(1)}$	1,459921	$1,982021 \cdot 10^{-13}$
$H_{11(3)}^{(2)}$	1,459921	$1,940255 \cdot 10^{-13}$
$H_{11(3)}^{(3)}$	1,459921	$1,907938 \cdot 10^{-13}$
$H_{11(3)}^{(4)}$	1,459921	$1,865555 \cdot 10^{-13}$
$H_{01(4)}^{(1)}$	1,459921	$3,268626 \cdot 10^{-12}$
$H_{01(4)}^{(2)}$	1,459921	$3,293065 \cdot 10^{-12}$
$H_{11(4)}^{(1)}$	1,459920	$2,939073 \cdot 10^{-12}$
$H_{11(4)}^{(2)}$	1,459920	$2,951936 \cdot 10^{-12}$
$H_{11(4)}^{(3)}$	1,459920	$3,429772 \cdot 10^{-12}$
$H_{11(4)}^{(4)}$	1,459920	$3,417088 \cdot 10^{-12}$

Tabla 5.1: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación vectorial presentada en la figura 5.2.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,459806	$4,814254 \cdot 10^{-25}$
$H_{01}^{(2)}$	1,459806	$-4,504473 \cdot 10^{-25}$
$H_{02}^{(1)}$	1,458969	$-9,364028 \cdot 10^{-28}$
$H_{02}^{(2)}$	1,458969	$-7,109939 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(1)}$	1,459508	$2,150996 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(2)}$	1,459507	$-1,079986 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(3)}$	1,459504	$-5,784307 \cdot 10^{-27}$
$H_{11}^{(4)}$	1,459503	$5,294813 \cdot 10^{-28}$
$H_{21}^{(1)}$	1,459112	$3,200220 \cdot 10^{-26}$
$H_{21}^{(2)}$	1,459112	$-1,232796 \cdot 10^{-26}$
$H_{21}^{(3)}$	1,459107	$-2,488754 \cdot 10^{-24}$
$H_{21}^{(4)}$	1,459107	$-7,757770 \cdot 10^{-24}$

Tabla 5.2: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la simulación vectorial presentada en la figura 5.3.

tanto en la forma de los modos como en los valores del índice de refracción efectivo hallados.

Se ha demostrado que si se crean zonas entre los anillos de aire lo suficientemente amplias como para que la señal pueda propagarse por ellas, entonces surgirán nuevos modos distintos a los presentes en el defecto de la fibra por lo que no se conseguirá el efecto de reflexión total interna deseada aumentando también con ello las pérdidas en la fibra.

En el capítulo anterior se demostró que la precisión de este método era bastante buena para fibras ópticas, con errores del orden del 0.001 % aproximadamente. Al ser la implementación del método para el caso de fibras de Bragg prácticamente idéntica al de las fibras ópticas, se puede suponer que el error cometido en este caso será del mismo orden de magnitud, con lo que para el posterior estudio de cristales fotónicos que se va a llevar a cabo a continuación, podemos predecir que se van a obtener resultados aceptables con una precisión suficientemente buena.

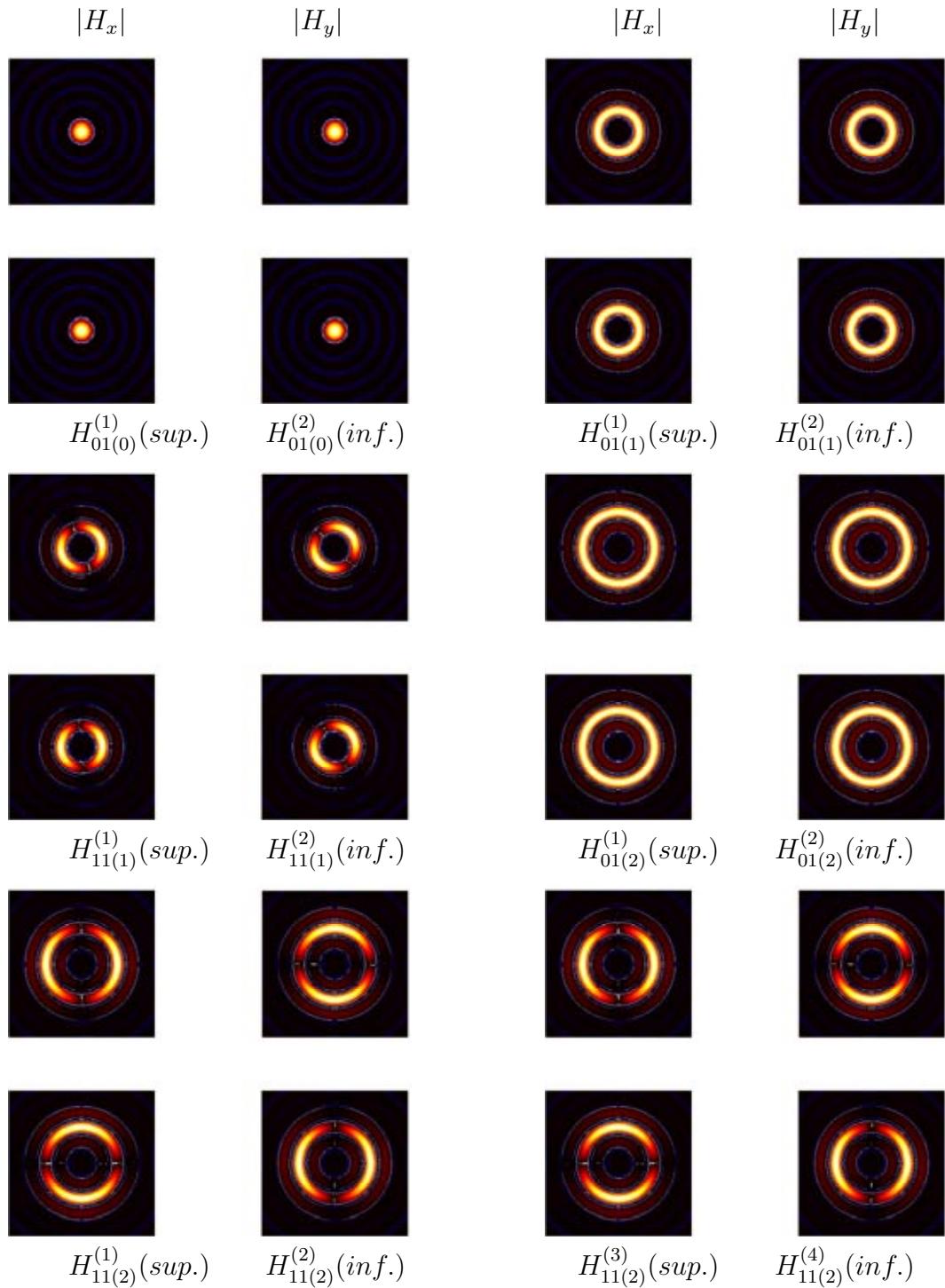


Figura 5.2: Modos normales de propagación en fibra de Bragg hallados por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el silicio de 1.46 y en el aire de 1.00, a una longitud de onda de 300 nm.

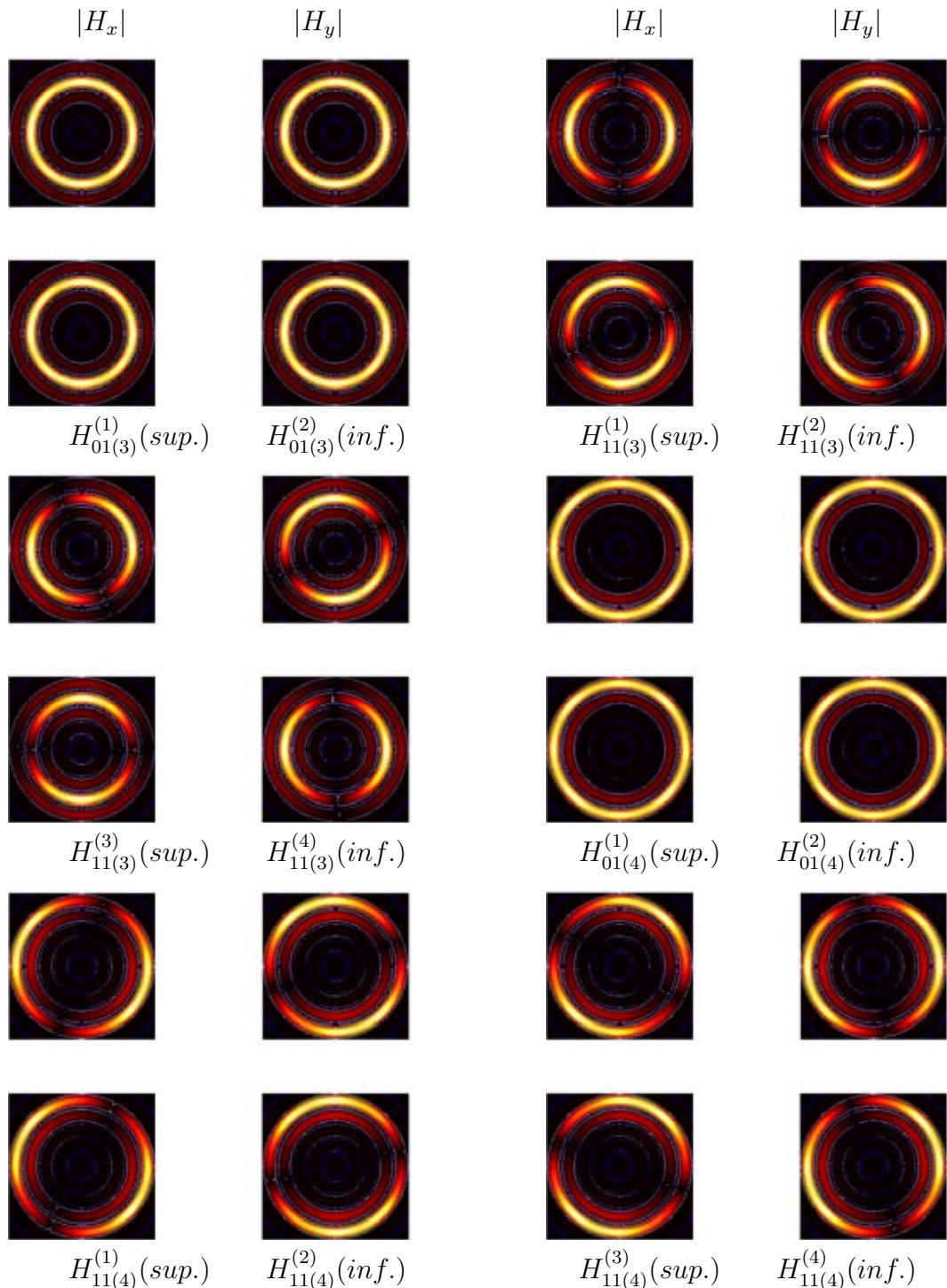


Figura 5.2 (continuación)

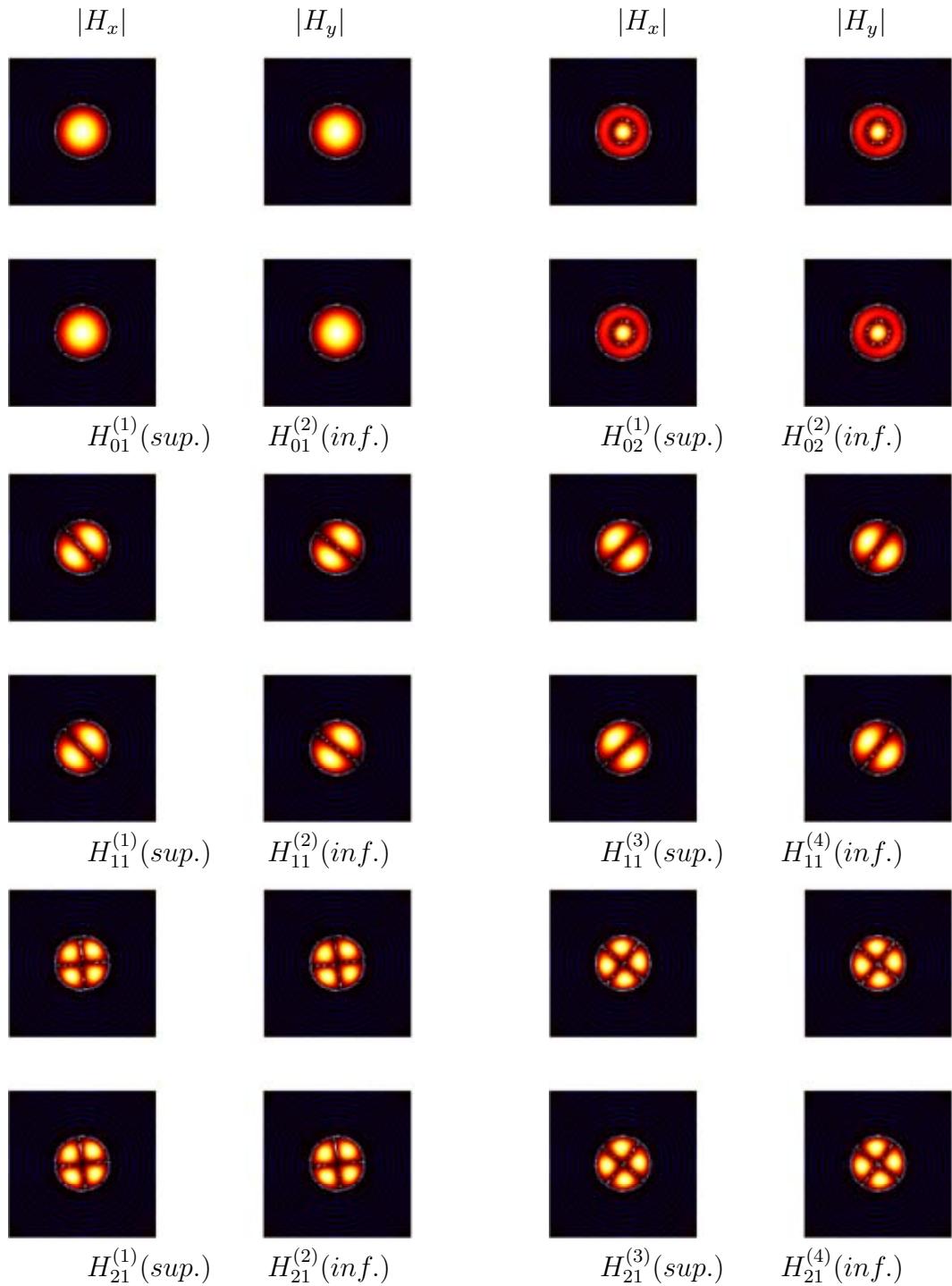


Figura 5.3: Modos normales de propagación en fibra de Bragg hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal), para unos valores del índice de refracción en el silicio de 1.46 y en el aire de 1.00, a una longitud de onda de 600 nm.

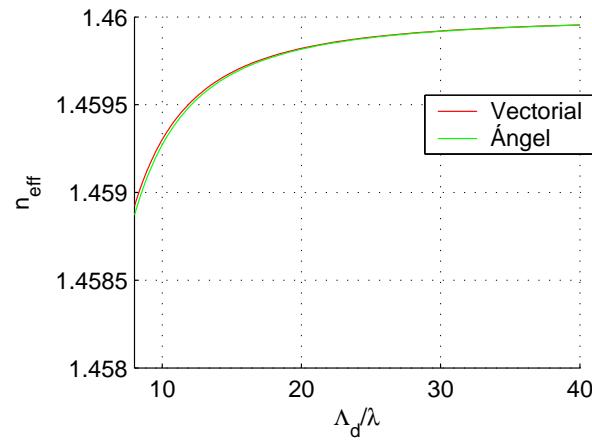


Figura 5.4: Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (Λ_d/λ) para una fibra de Bragg con $\Lambda = \Lambda_d = 1,190\mu m$, $e = 0,247\mu m$.

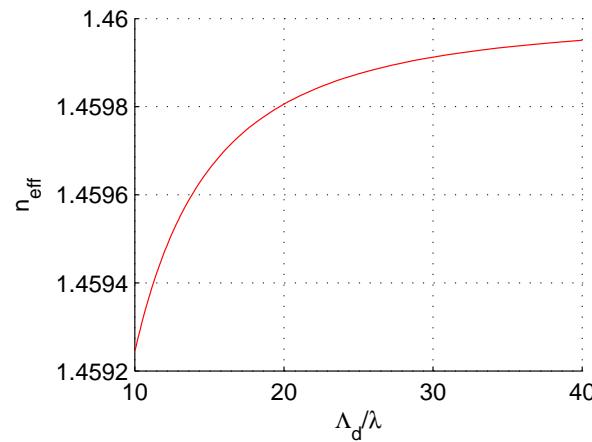


Figura 5.5: Valor del índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada (Λ_d/λ) para una fibra de Bragg con $\Lambda_d = 12\mu m$, $\Lambda = 4\mu m$, $e = 2\mu m$.

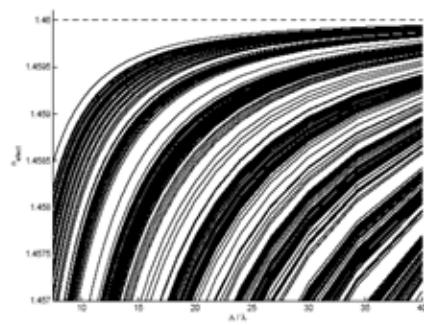


Figura 5.6: Indice de refracción efectivo de los 1000 primeros modos de una fibra tipo Bragg para una fibra con $\Lambda_d = \Lambda = 12\mu m$, $e = 2\mu m$ [2].

Capítulo 6

Fibras de cristal fotónico

6.1. Introducción

Las fibras de cristal fotónico, como ya se comentó en el capítulo 2, son fibras que tienen una geometría algo más compleja que las fibras ópticas y las fibras de Bragg ya vistas en capítulos precedentes. Los cristales fotónicos no presentan simetría radial, a pesar de tener una estructura de huecos que se repite en el espacio, excepto en la zona del defecto (zona central). Esta mayor complejidad de la geometría va a repercutir en una mayor dificultad a la hora de su simulación numérica, ya que necesita un mallado más fino, con el consiguiente gasto computacional que supone.

Los cristales fotónicos poseen numerosas propiedades inusuales como son un comportamiento monomodo en un alto rango de longitudes de onda, curva de pérdidas en los bordes a bajas longitudes de onda, área efectiva de núcleo en la región monomodo extremadamente grande o pequeña, dispersión de la velocidad de grupo anómala a longitudes de onda en el espectro visible y en las cercanías del infrarrojo, etc. Para precisar el comportamiento electromagnético de los cristales fotónicos, donde existen grandes diferencias entre el índice de refracción del silicio puro y de las regiones de aire, es crucial usar el modelo vectorial.

En este capítulo se comentarán los aspectos más destacados acerca de la implementación del método de Elementos Finitos en el caso de cristales fotónicos de geometría hexagonal, para posteriormente hacer hincapié en los resultados obtenidos, y comentar lo más destacable acerca de la propagación de ondas electromagnéticas en éstos.

6.2. Implementación numérica del problema

Los modos de propagación en cristales fotónicos tienden a adoptar la forma del defecto existente en la fibra, evitando los huecos. Para ello, se necesitará un mallado adecuado en las inmediaciones y dentro de los propios huecos, para tener una visión clara de la forma que adopta la magnitud del campo electromagnético creado en la fibra.

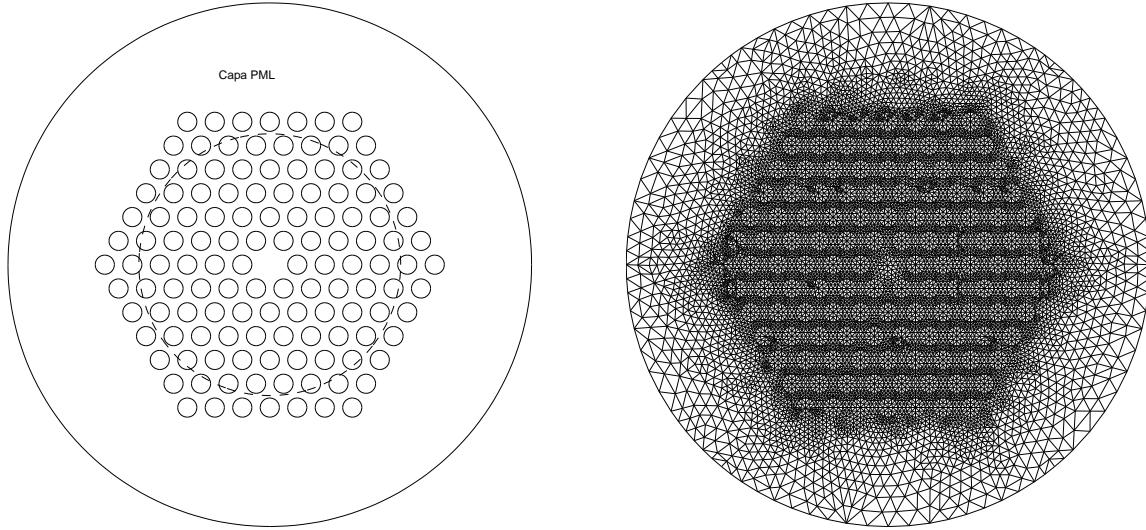


Figura 6.1: Geometría y mallado de una fibra hexagonal de cristal fotónico, con una capa PML en la zona externa.

Una vez más, la ecuación a resolver será la ecuación de Helmholtz vectorial en coordenadas cartesianas (2.31), que repetimos a continuación:

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_o^2 n^2(\vec{x}) + [\nabla_t(\ln n^2) \times (\nabla_t \times \circ)] \right\} \vec{h}_t = \beta^2 \vec{h}_t. \quad (6.1)$$

Al igual que con las fibras de Bragg, el valor del índice de refracción varía entre el valor del índice de refracción del aire en los huecos ($n_{aire} = 1$) y el índice de refracción del material; el valor de k_o será constante para cada longitud de onda, pudiéndose calcular como $k_o = 2\pi/\lambda$ donde λ constituye la longitud de onda de la señal portadora. Los índices de refracción de los modos propagantes estarán en el rango

$$n_c > n_{eff} = \frac{\beta}{k_o} > n_{FSM} \quad (6.2)$$

donde n_{FSM} [23], parámetro fundamental para caracterizar el comportamiento de los cristales fotónicos, representa el índice de refracción efectivo del modo fundamental en el revestimiento suponiéndolo éste infinito en el espacio y con el núcleo ausente y n_c es el índice de refracción del material con el que ésta fabricado el cristal (generalmente silicio). Si el valor de n_{eff} es menor que n_{FSM} , la luz puede ser radiada por lo que es importante evaluar de forma precisa este parámetro. El valor de n_{FSM} puede ser determinado aplicando el FEM vectorial a una región elemental del revestimiento como se muestra en la figura 6.2 (a). Las condiciones de contorno necesarias para el cálculo de n_{FSM} para la polarización x e y se resumen en la tabla 6.1 donde PMC (*Perfect Magnetic Conductor*) y PEC (*Perfect Electric Conductor*) representan contornos donde el campo eléctrico es perpendicular o paralelo a éstos, respectivamente. Otra forma de calcular

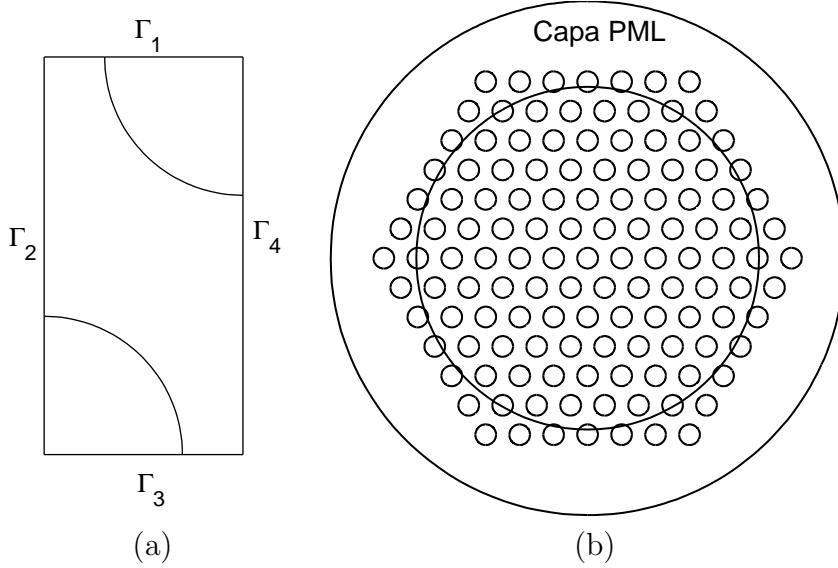


Figura 6.2: (a) Geometría elemental del revestimiento de un fibra hexagonal de cristal fotónico para el cálculo de n_{FSM} . (b) Geometría de un fibra hexagonal de cristal fotónico con el defecto sustituido para el cálculo de n_{FSM} .

este n_{FSM} es simular toda la fibra completa colocando un agujero de aire, del mismo diámetro que el resto, en el origen(de forma que se elimina el defecto) como se muestra en la figura 6.2 (b). De esta manera, se genera un revestimiento infinito siempre y cuando se use la condición PML de la misma manera que se viene usando hasta ahora.

Contorno		Polarización
Γ_1 y Γ_3	Γ_2 y Γ_4	
PMC	PEC	x
PEC	PMC	y

Tabla 6.1: Tabla en la que se indica las condiciones de contorno necesarias para el cálculo del n_{FSM} de una fibra de cristal fotónico para cada una de las polarizaciones.

Por analogía con las fibras ópticas, se puede introducir el concepto de frecuencia efectiva normalizada, V_{eff} [23], de un cristal fotónico como:

$$V_{eff} = k_o a_{eff} (NA), \quad (6.3)$$

donde a_{eff} representa el radio efectivo del cristal y NA la apertura numérica que, en este caso, vendrá dada por:

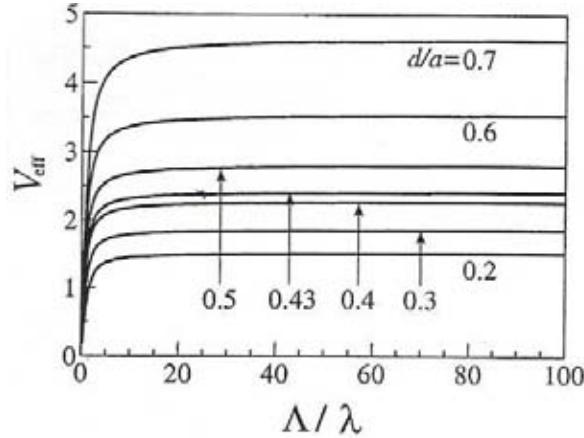


Figura 6.3: Frecuencia efectiva normalizada como función de Λ/λ para varios diámetros de agujeros [23].

$$NA = \sqrt{n_c^2 - n_{FSM}^2}, \quad (6.4)$$

En [23] se concluye que para que el cristal sea monomodo, de la misma manera que lo era la fibra óptica, es decir, para valores de V_{eff} inferiores a 2.405, es preciso definir el valor del radio del núcleo efectivo como sigue:

$$a_{eff} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}}, \quad (6.5)$$

donde Λ representa la distancia (centro-centro) entre dos agujeros de aire consecutivos.

En la figura 6.3 se presentan resultados precisos para la frecuencia normalizada efectiva, V_{eff} , para distintos valores de d_h/Λ , en función de la frecuencia normalizada Λ/λ . Esta figura demuestra que para diámetros de agujeros pequeños ($d_h/\Lambda \leq 0,43$) el comportamiento del cristal fotónico es monomodo. En la figura 6.4, el valor de a_{eff} es representado contra d_h/λ para el modo fundamental de un cristal fotónico hexagonal con idéntica distancia entre agujeros para varios diámetros de éstos donde el índice de refracción del silicio ha tomado un valor de 1.45.

Nuevamente se usarán condiciones de contorno absorbentes para la obtención de los modos normales de propagación. En estas fibras, se introducirá una capa PML que comenzará en la zona de huecos de la geometría (figura 6.1), de forma que se consiga absorber energía de los modos que tienden al exterior, lo que evitará su propagación. Así, se introduce una componente compleja que varíe entre cero y σ_{max} (ver ecuación 4.48). Asimismo, usaremos para las simulaciones el ensamblaje vectorial ya testeado en capítulos precedentes.

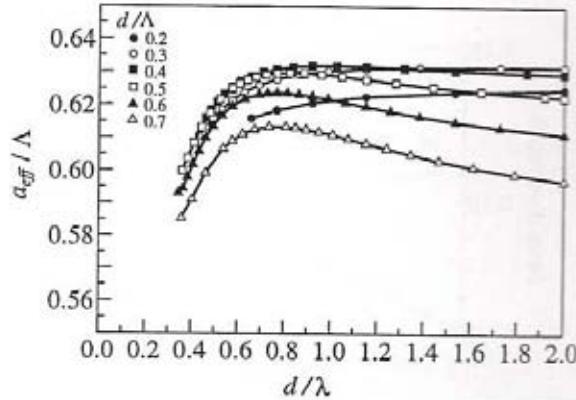


Figura 6.4: Radio del núcleo efectivo como función de d_h/λ para varios diámetros de agujeros [23].

6.3. Resultados experimentales

Los resultados que se han obtenido en las simulaciones de cristales fotónicos realizadas nos dan una idea clara de la forma que adoptan los modos de vibración en los mismos, y de la magnitud del índice de refracción efectivo. Como geometría base se ha elegido la geometría hexagonal periódica. Esta geometría se encuentra que es muy adecuada para este tipo de fibras, debido a que su periodicidad crea un índice de refracción medio en la zona de huecos uniforme, lo que da unos resultados excelentes para la propagación de ondas electromagnéticas.

A continuación, se expondrá la forma que adoptan los modos de propagación en cristales fotónicos de geometría hexagonal periódica. Posteriormente, se estudiarán los valores del índice de refracción efectivo hallados en los distintos modos. Por último, introduciremos el concepto de birrefringencia en cristales fotónicos.

6.3.1. Modos de propagación en cristales fotónicos hexagonales

Los modos de propagación en cristales fotónicos tienden a adaptarse a la geometría del defecto, produciéndose una serie de entrantes en las zonas entre huecos, como se puede ver en la figura 6.5. En ésta, se muestran los valores absolutos de las tres componentes del campo magnético de los modos propagantes de un cristal fotónico con una distancia entre centros $\Lambda = 23\mu m$ y un diámetro de agujeros de $d_h = 16\mu m$ para una longitud de onda de 900 nm con un índice de refracción del silicio de 1.48. Puesto que la relación $d_h/\Lambda > 0.43$, el cristal simulado es multimodo. Podemos observar cierta similitud entre los modos aquí encontrados con los que expusimos en la fibra óptica.

En la tabla 6.2 se muestran los valores de los índices de refracción efectivos para cada

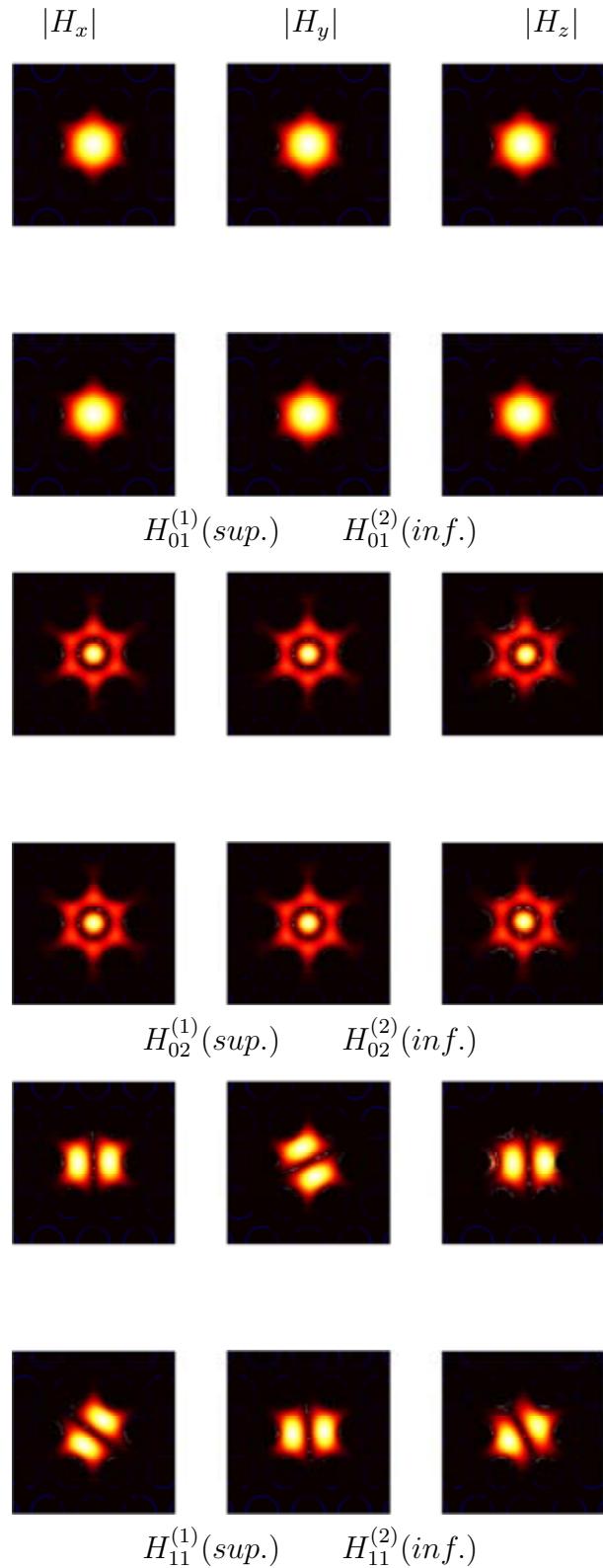


Figura 6.5: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$.

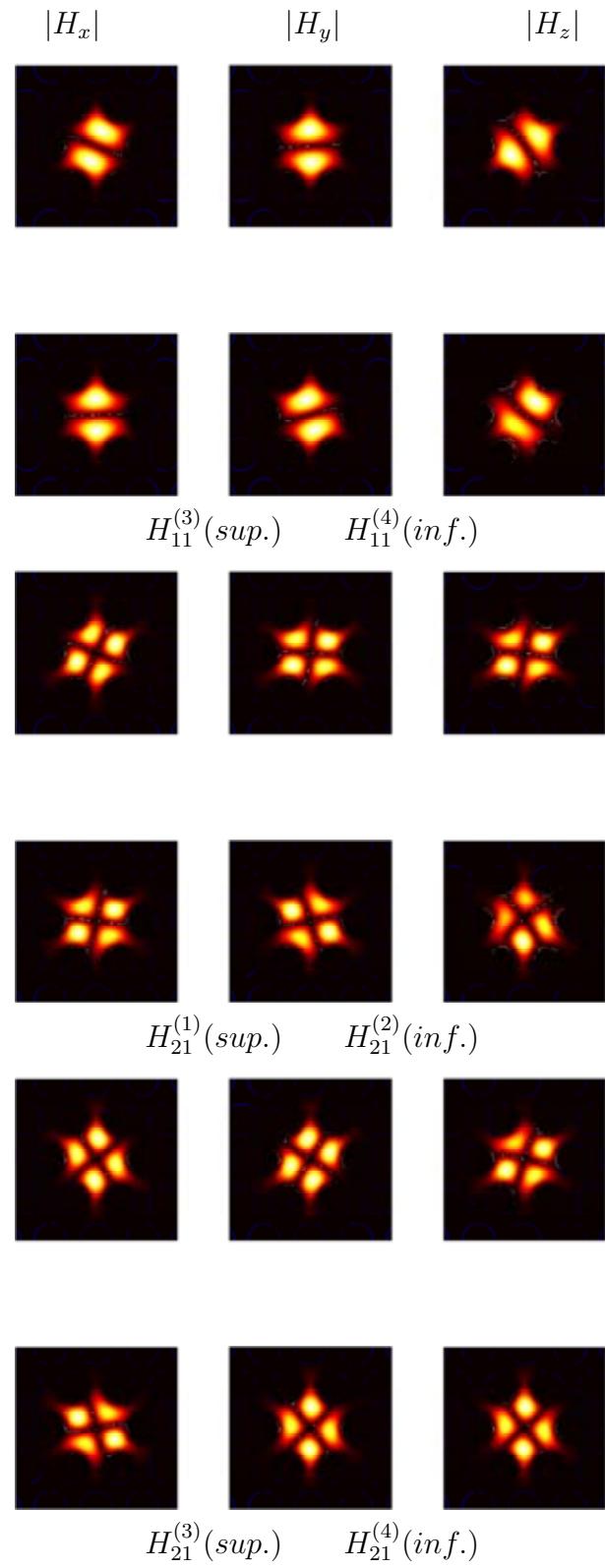


Figura 6.5 (continuación)

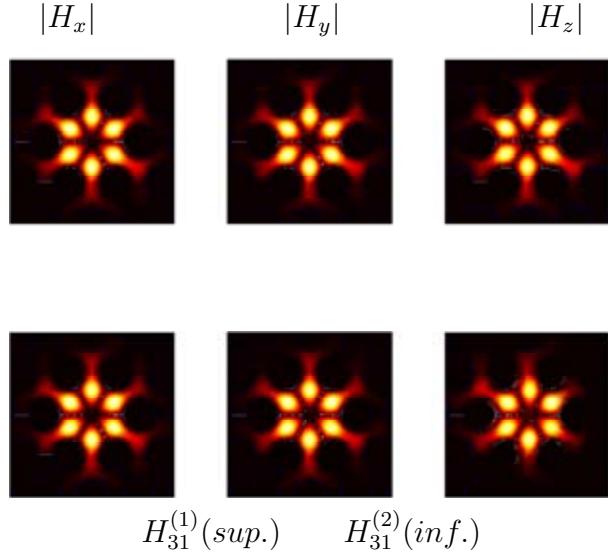


Figura 6.5 (continuación)

uno de los modos de la figura 6.5.

Observando la figura 6.6, se puede ver la adaptación del modo al defecto de una forma más clara. Asimismo, se observa que al aumentar la distancia entre huecos Λ y el diámetro d_h de los huecos, estos “picos” entrantes en la zona de huecos se hacen mayores, al existir un espacio más grande entre los mismos.

Otra propiedad que vamos a demostrar aquí (aunque podíamos haberlo hecho con anterioridad) es la ortogonalidad entre los dos primeros modos fundamentales. Si representamos en la figura 6.7 el vector campo magnético transversal para cada uno de los dos modos fundamentales en cada punto de la estructura, podemos observar con claridad que éstos vectores son perpendiculares.

En cristales fotónicos (al igual que en fibras ópticas y fibras de Bragg) se dan modos evanescentes en la zona de huecos, aunque su propagación se da en un intervalo de tiempo muy corto en comparación con el modo principal, como ya se comentó en la sección 4.4. En el presente estudio se supondrá que estamos en un lugar de la fibra suficientemente alejado del extremo inicial, de forma que no atenderemos a estos modos. No obstante, en la figura 6.8 y en la tabla 6.3 se muestran algunos de estos modos con los correspondientes valores del índice de refracción efectivo.

En la tabla 6.3 se demuestra que estos modos son evanescentes ya que los índices de refracción poseen una componente imaginaria elevada.

Otro aspecto muy importante a tener en cuenta en fibras de cristal fotónico, que hace que tengan gran interés práctico, es su comportamiento monomodo en un amplio rango de longitudes de onda. Para ello, demostraremos en la figura 6.9 que la frontera entre el comportamiento monomodo y el multimodo viene determinado por la relación $d_h/\Lambda \approx 0,43$. En ella, presentamos los modos de sendas fibras de cristal fotónico con el

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,479852	$-4,617908 \cdot 10^{-23}$
$H_{01}^{(2)}$	1,479852	$-1,067154 \cdot 10^{-22}$
$H_{02}^{(1)}$	1,479259	$1,606305 \cdot 10^{-24}$
$H_{02}^{(2)}$	1,479259	$1,291686 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(1)}$	1,479631	$2,611064 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(2)}$	1,479631	$-2,805965 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(3)}$	1,479630	$1,255598 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(4)}$	1,479630	$-1,280420 \cdot 10^{-25}$
$H_{21}^{(1)}$	1,479357	$-5,563175 \cdot 10^{-23}$
$H_{21}^{(2)}$	1,479357	$-2,895538 \cdot 10^{-21}$
$H_{21}^{(3)}$	1,479356	$-1,603318 \cdot 10^{-22}$
$H_{21}^{(4)}$	1,479356	$6,917056 \cdot 10^{-22}$
$H_{31}^{(1)}$	1,479151	$2,935045 \cdot 10^{-26}$
$H_{31}^{(2)}$	1,479151	$3,023826 \cdot 10^{-26}$

Tabla 6.2: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 6.5.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{ev01}^{(1)}$	1,479753	$3,598259 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev01}^{(2)}$	1,479753	$3,602196 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev11}^{(1)}$	1,479750	$5,031738 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev11}^{(2)}$	1,479750	$5,037565 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev11}^{(3)}$	1,479750	$6,061747 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev11}^{(4)}$	1,479750	$6,062010 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(1)}$	1,479747	$5,774136 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(2)}$	1,479747	$5,779675 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(3)}$	1,479747	$8,191725 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev21}^{(4)}$	1,479747	$8,201714 \cdot 10^{-8}$
$H_{ev31}^{(1)}$	1,479741	$1,200399 \cdot 10^{-7}$
$H_{ev31}^{(2)}$	1,479741	$1,202005 \cdot 10^{-7}$

Tabla 6.3: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos evanescentes representados en la figura 6.8.

mismo parámetro Λ , pero con la diferencia de que una de ellas tiene un valor de d_h/Λ un poco superior a 0.43 y la otra un poco inferior a este valor frontera.

La existencia de este comportamiento monomodo se debe a que se da una diferencia muy pequeña entre el índice de refracción del defecto y el índice de refracción medio de la zona de huecos, para un tamaño suficientemente pequeño de éstos, con lo que la apertura numérica NA disminuye. En fibras ópticas, se demostró que esto ayudaba a la consecución de fibras monomodo, efecto que se consigue fácilmente con cristales fotónicos.

6.3.2. Dispersión en fibras hexagonales

Los índices de refracción efectivos se definen como la relación entre el número de onda de un modo, y el número de onda del vacío (valor k_o en la ecuación 6.1). El empleo de estos índices, ya usados en el estudio de fibras ópticas y fibras tipo Bragg, se debe a que dan una perspectiva de los valores del número de onda o de los autovalores de la ecuación de Helmholtz bastante intuitiva.

Estos índices, como se vio en el capítulo 2, no pueden sobrepasar el valor del índice de refracción del material de la fibra, aunque su valor es muy parecido al mismo, tendiendo asintóticamente a él al aumentar la frecuencia de la luz (disminuir la longitud de onda).

La tendencia del modo fundamental n_{eff} conforme aumenta la frecuencia normalizada Λ/λ en cristales fotónicos es muy similar a la hallada en fibras ópticas y fibras Bragg, como se puede observar en la figura 6.10. En ella, se observa el índice de refracción

efectivo del modo fundamental para dos fibras distintas, con igual distancia entre huecos Λ , y distinto diámetro de los mismos. Se puede ver que el cambio que se produce entre una y otra no es muy pronunciado, teniendo valores similares para fibras de dimensiones parecidas.

En la figura 6.11 se muestra una tendencia muy similar al cambiar el valor de Λ dejando constante el diámetro de los agujeros. Tanto en el caso anterior como en este, los índices efectivos de la fibra con tamaño de hueco menor respecto a Λ son mayores. Esto se da, con carácter general, en todas las simulaciones que se ha realizado en la ejecución de este proyecto.

Otro concepto importante en cristales fotónicos es la birrefringencia B que se define como la diferencia en valor absoluto de las partes reales de los índices de refracción de los modos fundamentales obtenidos de polarizaciones en direcciones perpendiculares.

$$B = |n_{eff}^x - n_{eff}^y|. \quad (6.6)$$

Para nuestro problema este concepto es equivalente a la diferencia en valor absoluto de las partes reales de los dos modos principales de propagación pues se ha demostrado que éstos son ortogonales. En la figura 6.12 se muestran los valores de la birrefringencia para varias fibras con la misma separación entre agujeros y distinto diámetro de los mismos. Se observa que conforme disminuye el diámetro de los agujeros, disminuye la birrefringencia.

6.4. Conclusiones

Aunque sólo se halla realizado la simulación de fibras de cristal fotónico mediante el método de Elementos Finitos aquí implementado, no teniendo una referencia para su comparación con otro método numérico como ocurría en capítulos anteriores, los resultados obtenidos se ajustan a los esperados, si se comparan con los que se encuentran disponibles en la bibliografía [24, 25, 26, 27], por lo que se concluye que dan una perspectiva bastante realista del comportamiento de cristales fotónicos en lo que a modos de propagación se refiere. No se han realizado simulaciones escalares ya que no aportan nada nuevo con respecto a lo comentado en el capítulo 4.

Con los resultados hallados en las simulaciones realizadas, se podría decir que las fibras de cristal fotónico exhiben un comportamiento excelente para su uso en tareas de comunicación óptica. Los modos de propagación se encuentran recluidos en la zona del defecto de la geometría, es decir, en la zona de la fibra donde no hay huecos, dándose operación monomodo en un rango muy amplio de longitudes de onda (el rango usado comúnmente entre 300 y 1600 nm). Asimismo, se ha corroborado la frontera existente entre el comportamiento monomodo y el multimodo de la misma manera que la bibliografía consultada demostraba.

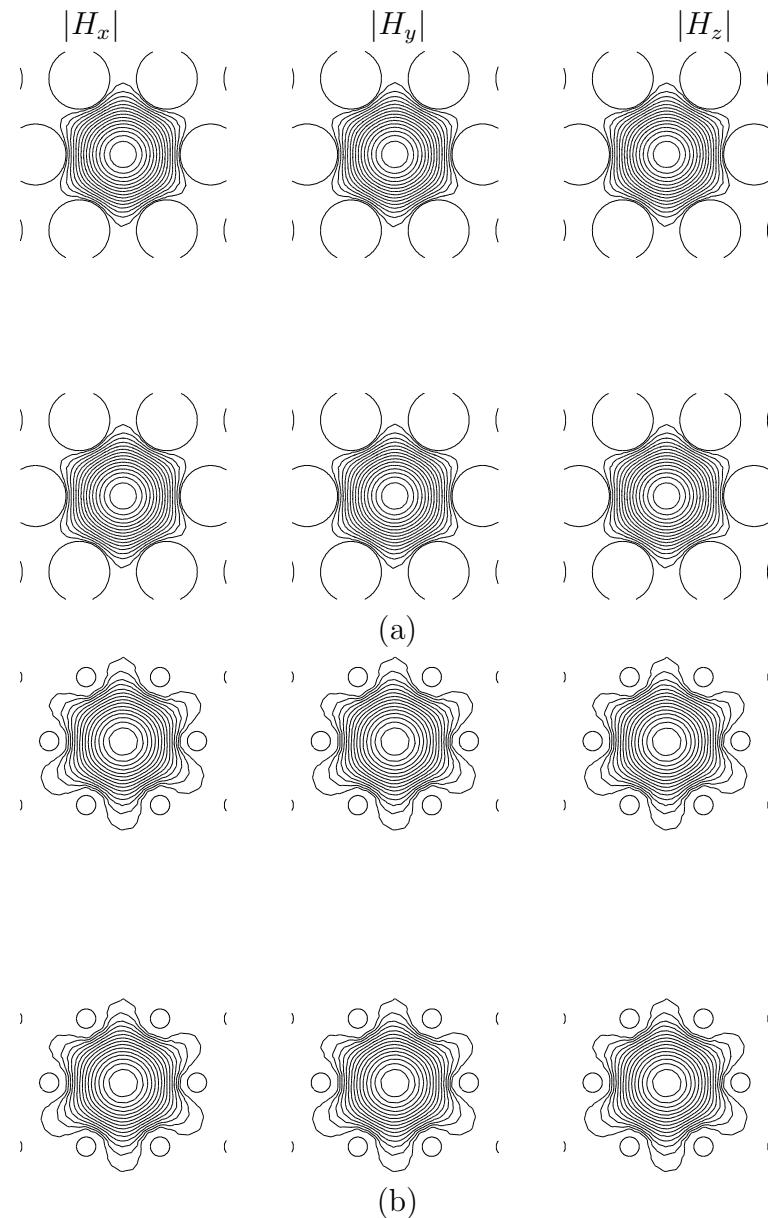


Figura 6.6: Modos fundamentales en una fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm. (a) $\Lambda = 23\mu m$ $d_h = 16\mu m$. (b) $\Lambda = 23\mu m$ $d_h = 6\mu m$.

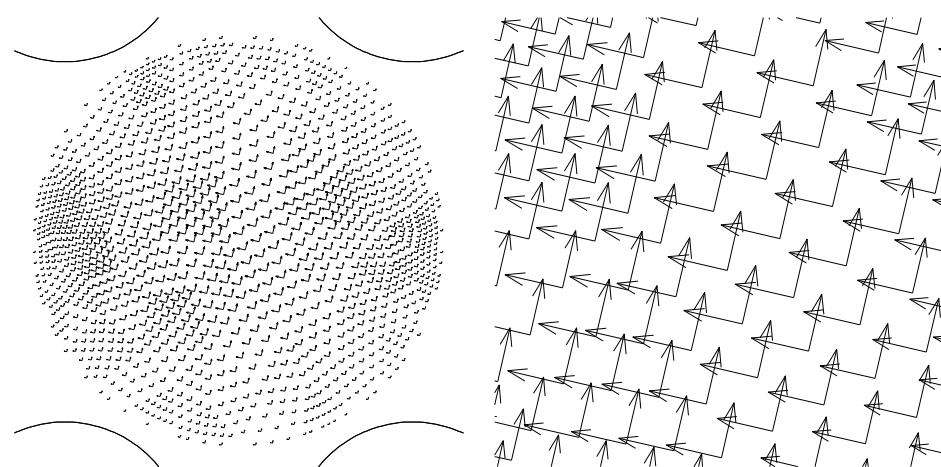


Figura 6.7: Representación vectorial de los modos fundamentales en una fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un zoom de la zona central del núcleo o defecto para observar con claridad la ortogonalidad.

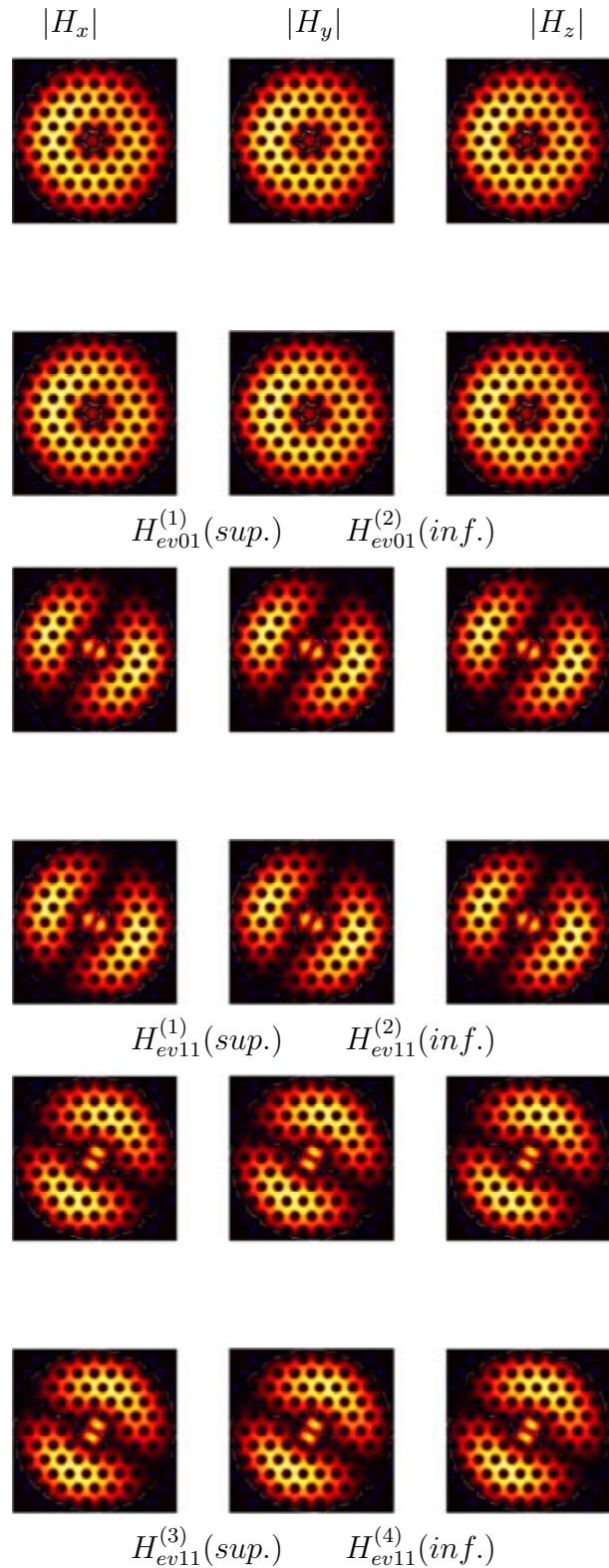


Figura 6.8: Modos evanescentes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 10\mu\text{m}$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu\text{m}$.

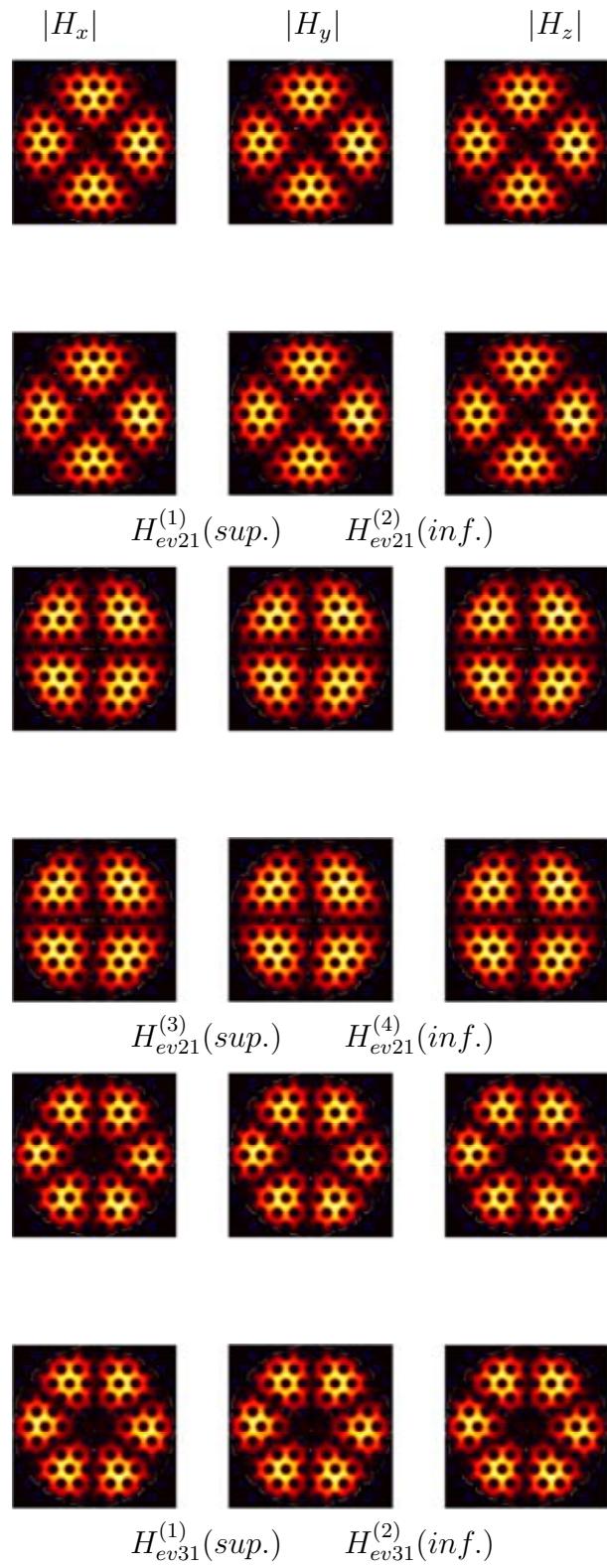


Figura 6.8 (continuación)

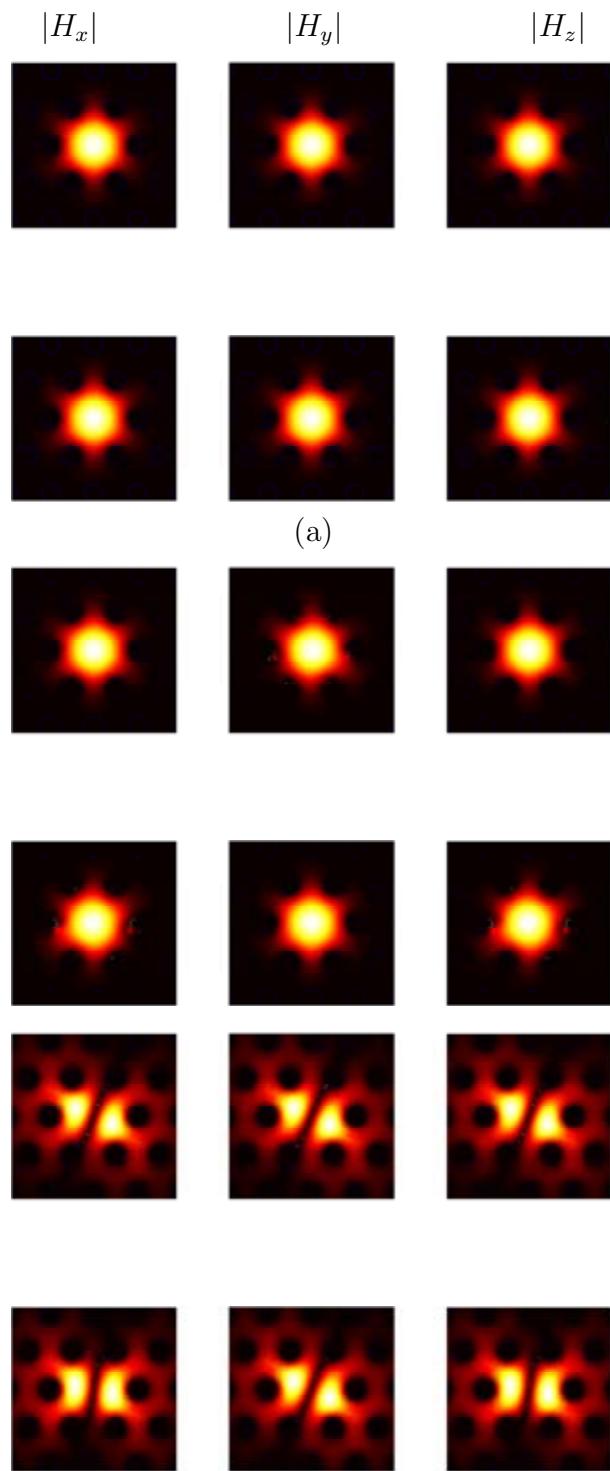


Figura 6.9: Modos fundamentales en una fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm (a) $d_h = 9,421\mu m$ $\Lambda = 23\mu m$. (b) $d_h = 10\mu m$ $\Lambda = 23\mu m$.

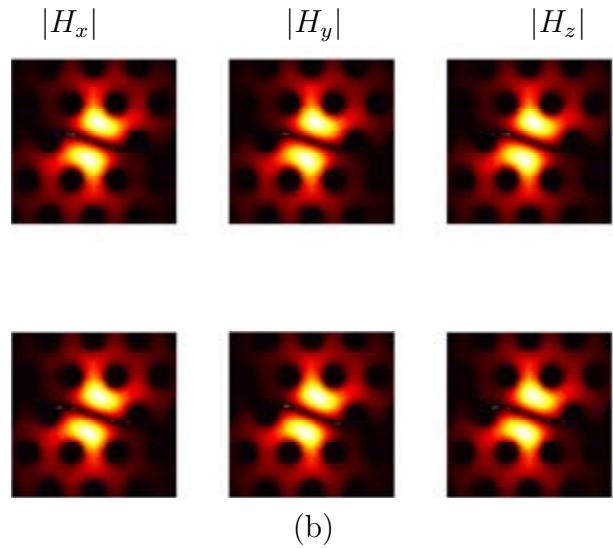
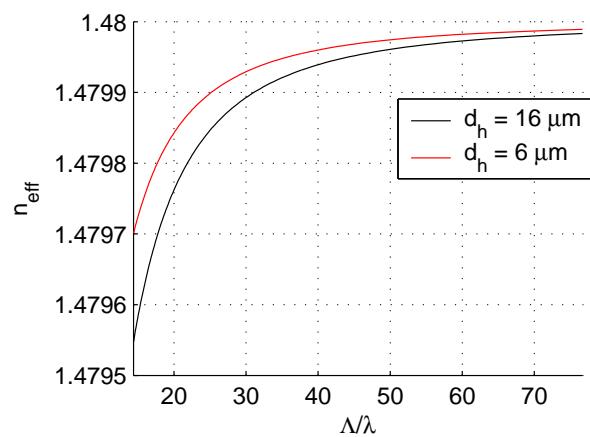


Figura 6.9 (continuación)

Figura 6.10: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $\Lambda = 23 \mu\text{m}$, y $d_h = 16 \mu\text{m}$ y $d_h = 6 \mu\text{m}$ respectivamente.

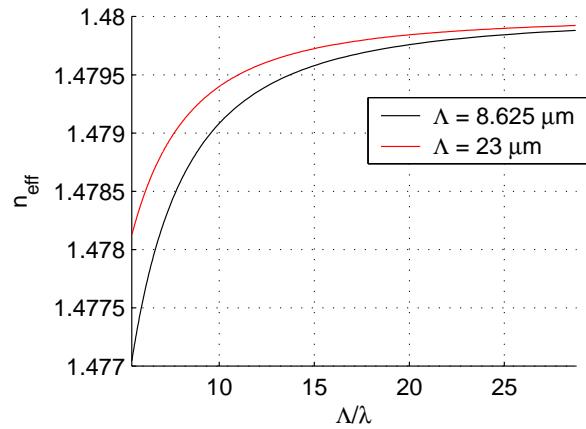


Figura 6.11: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 6 \mu\text{m}$, y $\Lambda = 23 \mu\text{m}$ y $\Lambda = 8,625 \mu\text{m}$ respectivamente.

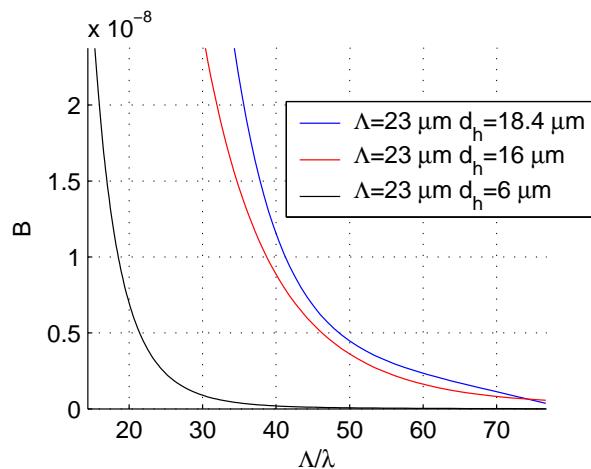


Figura 6.12: Birrefringencia para longitudes de onda entre 300 nm y 1500 nm en fibras con $\Lambda = 23 \mu\text{m}$ y $d_h = 18,4, 16, 6 \mu\text{m}$.

Capítulo 7

Otras fibras de cristal fotónico

7.1. Introducción

En el capítulo anterior se estudió la propagación de ondas electromagnéticas en fibras de cristal fotónico de geometría hexagonal, viéndose la forma que adoptan los modos propagantes en éstas, así como algunas propiedades de interés como los valores de los índices de refracción efectivo de los modos fundamentales o la dispersión en función de la frecuencia normalizada. Estas fibras se consideran perfectas, es decir, no poseen ningún tipo de imperfección o defecto de fabricación en ellas.

En el presente capítulo se tendrá en cuenta la posibilidad de existencia de algún tipo de imperfección en las fibras, como consecuencia de un fallo en el proceso de fabricación, estudiándose la variación de los anteriores parámetros respecto a la fibra sin defecto. Las posibles imperfecciones que someteremos a estudio serán de varias clases [28, 29]. En primer lugar, fibras con defectos puntuales, tales como algún hueco mayor o menor al resto e incluso la ausencia de alguno de ellos [30]. Asimismo, estudiaremos el efecto producido por pequeñas variaciones aleatorias en los parámetros de los huecos (radio, posición del centro), errores éstos más habituales en los procesos de fabricación de la fibra, con lo que comprobaremos de una forma más realista las posibles diferencias entre la fibra real y la teórica perfecta.

Por otro lado, se considerará también la posibilidad de crear otras geometrías para la fibra de cristal fotónico distinta a la geometría hexagonal vista hasta ahora, prestando atención tanto a la forma que adoptan los modos como a los valores del índice de refracción efectivo y a la dispersión. De esta manera se corroborará si el comportamiento observado hasta ahora se mantiene con otras geometrías.

Todos los aspectos que se van a tratar en este capítulo han sido poco estudiados, por lo que no hay resultados disponibles en la bibliografía para contrastar lo que a continuación se expondrá. No obstante, la precisión del método implementado ya ha sido suficientemente validada en capítulos precedentes, por lo que se aceptarán los resultados que se hallen.

La estructura del capítulo es la siguiente: se estudiarán los efectos que pueda tener la existencia de defectos de fabricación puntuales en la fibra. A continuación, estudiaremos

los defectos aleatorios aplicando un procedimiento estocástico para simular la posible variación de los parámetros del hueco. Por último, se propondrán algunas geometrías alternativas.

7.2. Fibras de cristal fotónico defectuosas

Además de lo expuesto en el capítulo anterior, se han realizado una serie de simulaciones con fibras en las que existe algún tipo de defecto, algo que podría suceder en el proceso de fabricación de éstas [29]. Se han considerado distintos tipos de defectos. Por un lado, se ha estudiado la existencia de algún tipo de defecto de carácter puntual, para posteriormente estudiar defectos aleatorios en la geometría de la fibra.

7.2.1. Defectos puntuales de fabricación

Además de lo expuesto anteriormente, se han realizado una serie de simulaciones con fibras en las que existe algún tipo de defecto puntual, algo que podría suceder en el proceso de fabricación de éstas. Los defectos considerados en esta sección son de tres tipos: existencia de un hueco menor que el resto, existencia de un hueco mayor que el resto y ausencia de algún hueco donde debería haberlo. A continuación, presentamos los resultados para cada uno de ellos.

Huecos de menor tamaño que el resto

En el caso de fibras en los que algún hueco es menor que resto (figura 7.1), el efecto que se produce es bastante pequeño, afectando de forma poco considerable tanto a la forma de los modos como a los valores del n_{eff} .

No obstante, se observa en la figura 7.2 la presencia de algunos modos no vistos hasta ahora y que surgen como consecuencia de la nueva geometría.

En la tabla 7.1 se exponen los valores de los índices de refracción efectivos de estos modos.

En la figura 7.3 se muestra la dispersión de la fibra en función de la frecuencia normalizada.

También se ha estudiado cambiar la posición del hueco, colocándolo en distintas posiciones de la fibra y rompiendo la simetría, siendo los resultados prácticamente idénticos (estos resultados se pueden consultar en el CD que se adjunta con el proyecto).

Huecos de mayor tamaño que el resto

En el caso de que el tamaño del hueco defectuoso sea mayor que el del resto (figura 7.4), los resultados son muy similares a los hallados anteriormente.

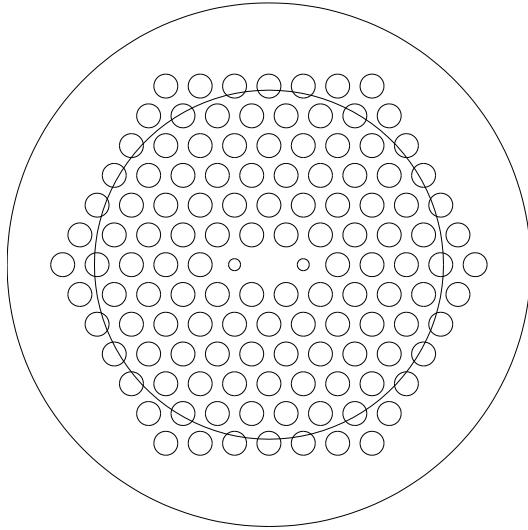


Figura 7.1: Geometría de cristal fotónico con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 16\mu m$, donde se han introducido dos huecos con mitad de diámetro que el resto.

El modo principal se deforma un tanto en la zona del hueco mayor, aunque presenta una forma muy similar al de la fibra sin este defecto. En la figura 7.5 se puede consultar este resultado.

El n_{eff} es algo menor con este tipo de defecto, aunque nuevamente la diferencia es muy pequeña(ver figura 7.6).

A la vista de estos resultados, se puede decir que las fibras de cristal fotónico son muy robustas ante posibles fallos en el cambio del tamaño de alguno de los huecos de la estructura.

Ausencia de algún hueco

Un defecto algo más grave sería la ausencia de algún hueco como se muestra en la figura 7.7 [30].

De la figura 7.8 se concluye que, en el caso que el hueco se encuentre junto al defecto de la fibra, la forma que presenta el modo principal cambia, deformándose de manera que adopte la forma del nuevo defecto. Además, puesto que el defecto aumenta de tamaño, en una fibra que inicialmente era monomodo se puede propagar un segundo modo. Los índices de refracción efectivos de los modos pueden consultarse en la tabla 7.3.

Por otro lado, si el hueco ausente está en otro lugar(figura 7.9), el modo principal se da no sólo en la zona central, sino también en la zona del hueco ausente. Para todos los efectos es como si la fibra tuviese dos defectos.

En cuanto a la dispersión observada en cristales fotónicos con huecos ausentes, cabe comentar que si éste no se encuentra en la primera capa, entonces no se produce variación

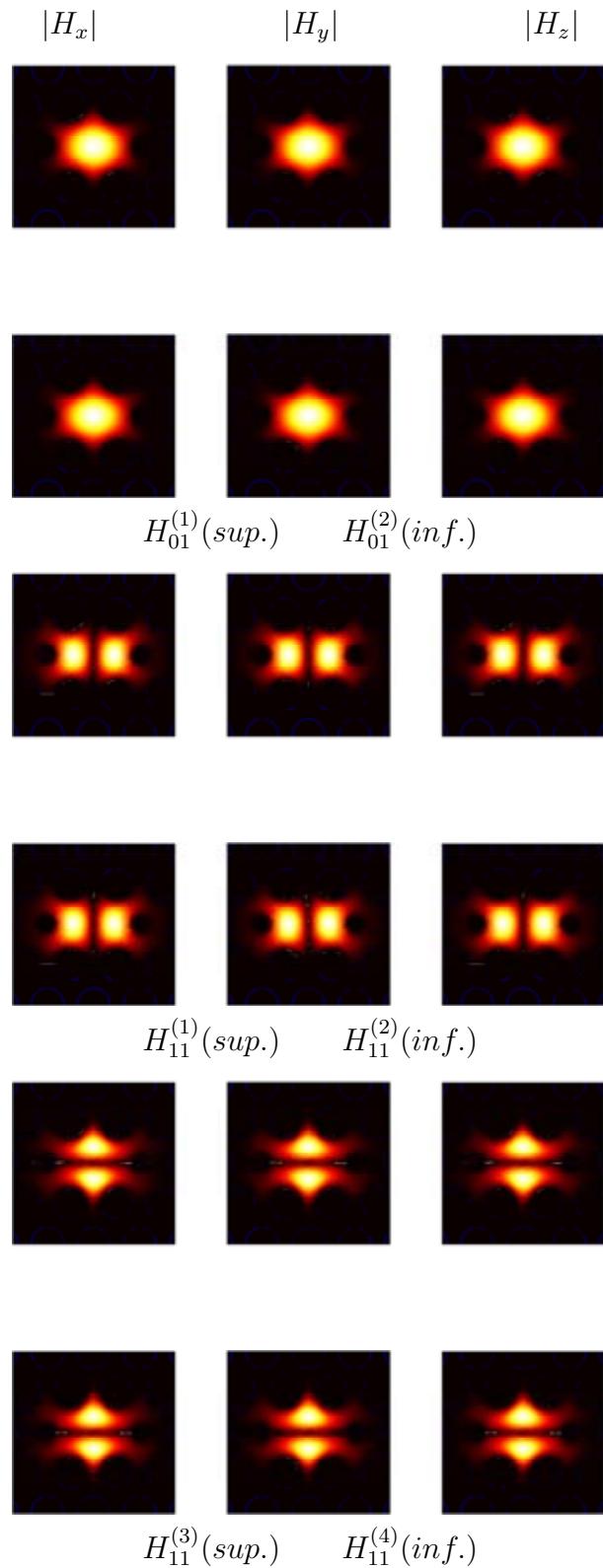


Figura 7.2: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu\text{m}$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu\text{m}$ con dos huecos de mitad de diámetro que el resto.

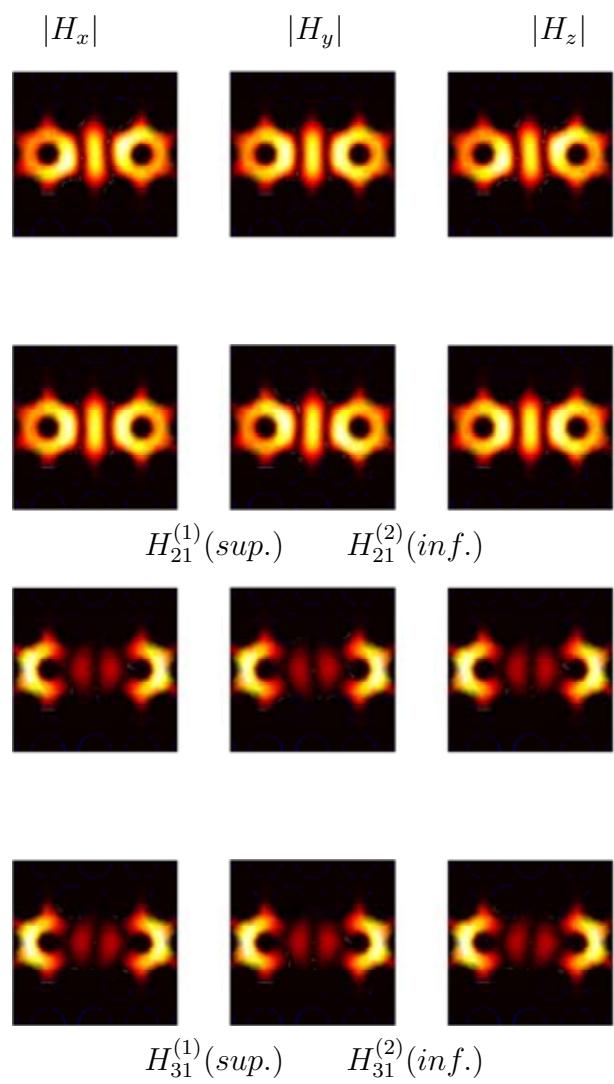


Figura 7.2 (continuación)

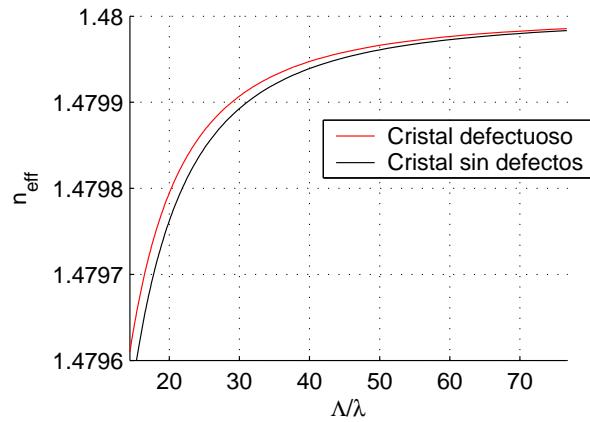


Figura 7.3: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 16\mu\text{m}$ y $\Lambda = 23\mu\text{m}$, una de ellas con huecos de $d_h = 8\mu\text{m}$.

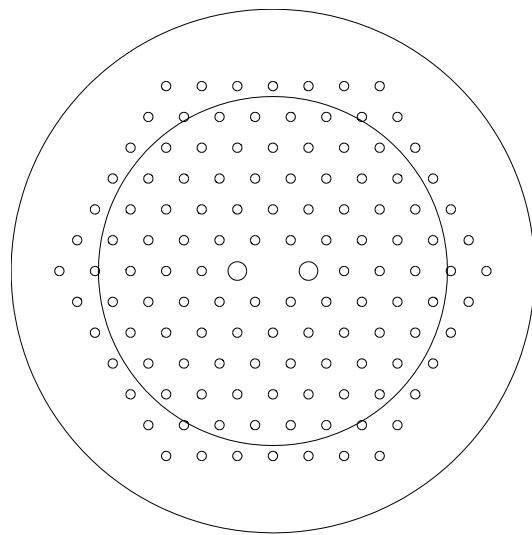


Figura 7.4: Geometría de cristal fotónico con $\Lambda = 23\mu\text{m}$ y $d_h = 6\mu\text{m}$, donde se han introducido dos huecos con diámetro doble que el resto.

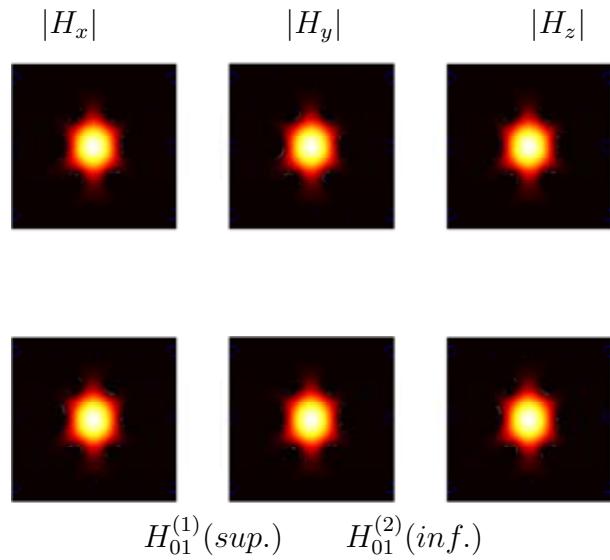


Figura 7.5: Modos fundamentales a una longitud de onda de 900 nm en fibras con $d_h = 6\mu m$, y $\Lambda = 23\mu m$. El defecto introducido son dos huecos de diámetro doble $d_h = 12\mu m$.

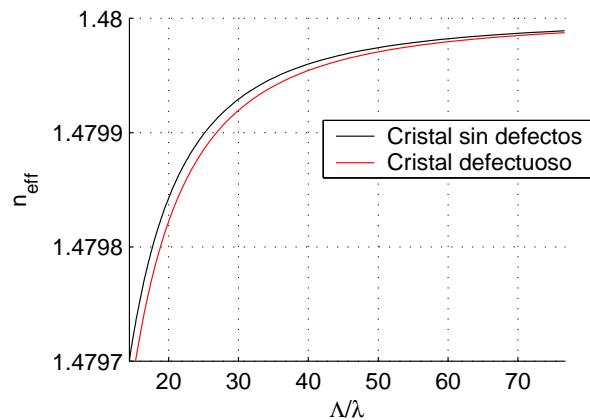


Figura 7.6: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 6\mu m$ y $\Lambda = 23\mu m$, una de ellas con huecos de $d_h = 12\mu m$.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,479872	$2,025850 \cdot 10^{-25}$
$H_{01}^{(2)}$	1,479872	$8,449440 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(1)}$	1,479730	$8,379074 \cdot 10^{-27}$
$H_{11}^{(2)}$	1,479730	$1,224504 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(3)}$	1,479635	$1,303441 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(4)}$	1,479635	$-4,970088 \cdot 10^{-26}$
$H_{21}^{(1)}$	1,479573	$-4,520823 \cdot 10^{-24}$
$H_{21}^{(2)}$	1,479573	$-2,385790 \cdot 10^{-24}$
$H_{31}^{(1)}$	1,479533	$2,935045 \cdot 10^{-24}$
$H_{31}^{(2)}$	1,479533	$3,023826 \cdot 10^{-24}$

Tabla 7.1: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.2.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,479889	$1,903812 \cdot 10^{-20}$
$H_{01}^{(2)}$	1,479889	$1,915628 \cdot 10^{-20}$

Tabla 7.2: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.5.

significativa del modo fundamental como puede apreciarse con claridad en la figura 7.10.

7.2.2. Defectos aleatorios de fabricación

Una forma más realista de simular los defectos de fabricación que se pueden dar en fibras de cristal fotónico es la generación de errores de forma aleatoria tanto en el tamaño de cada hueco individual como en la posición del mismo. Esta generación se ha hecho con `rand`, una función que posee MatLab para la generación de números aleatorios en el intervalo $[0, 1]$. En la figura 7.11 se muestra un ejemplo de un cristal fotónico defectuoso.

A continuación, se van a exponer los resultados para distintos valores del máximo error E en % que se ha considerado se va a cometer. Para ilustrar estos efectos se ha considerado un cristal fotónico estandar con un diámetro de hueco $d_h = 18,4\mu m$ y una constante hexagonal $\Lambda = 23\mu m$.

Se han tenido en cuenta valores de E del 1, 3, 5 y 10 %. Con estos niveles de deformación se pueden llegar incluso a producir colapsos de agujeros (ver figura 7.11) por lo que

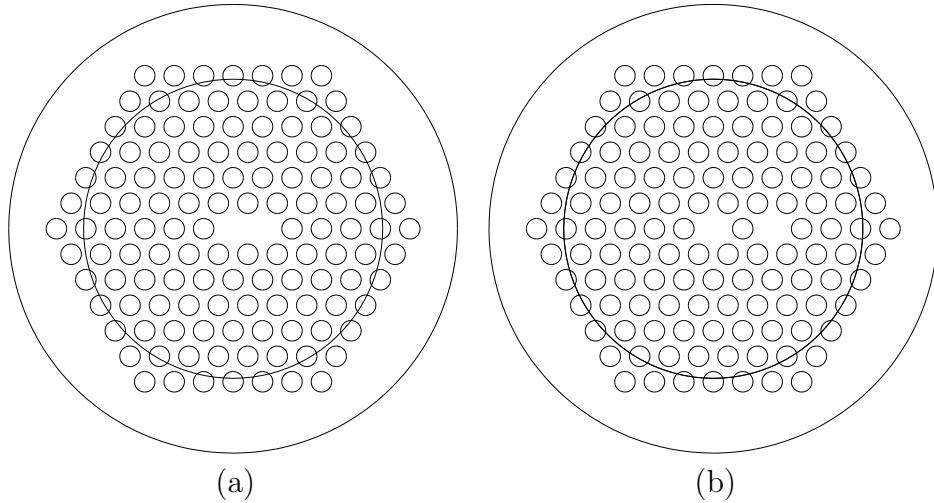


Figura 7.7: Geometría de cristal fotónico con $\Lambda = 23\mu m$ y $d_h = 16\mu m$, donde se ha eliminado uno de los huecos de la primera capa en (a) mientras que en (b) la ausencia de hueco se da en la segunda capa.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,479888	$-2,041169 \cdot 10^{-21}$
$H_{01}^{(2)}$	1,479888	$4,737418 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(1)}$	1,479827	$-2,614735 \cdot 10^{-22}$
$H_{11}^{(2)}$	1,479827	$-9,762025 \cdot 10^{-22}$
$H_{11}^{(3)}$	1,479686	$2,608769 \cdot 10^{-21}$
$H_{11}^{(4)}$	1,479686	$-1,175302 \cdot 10^{-22}$
$H_{21}^{(1)}$	1,479641	$-2,731667 \cdot 10^{-22}$
$H_{21}^{(2)}$	1,479641	$4,148216 \cdot 10^{-24}$

Tabla 7.3: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.8.

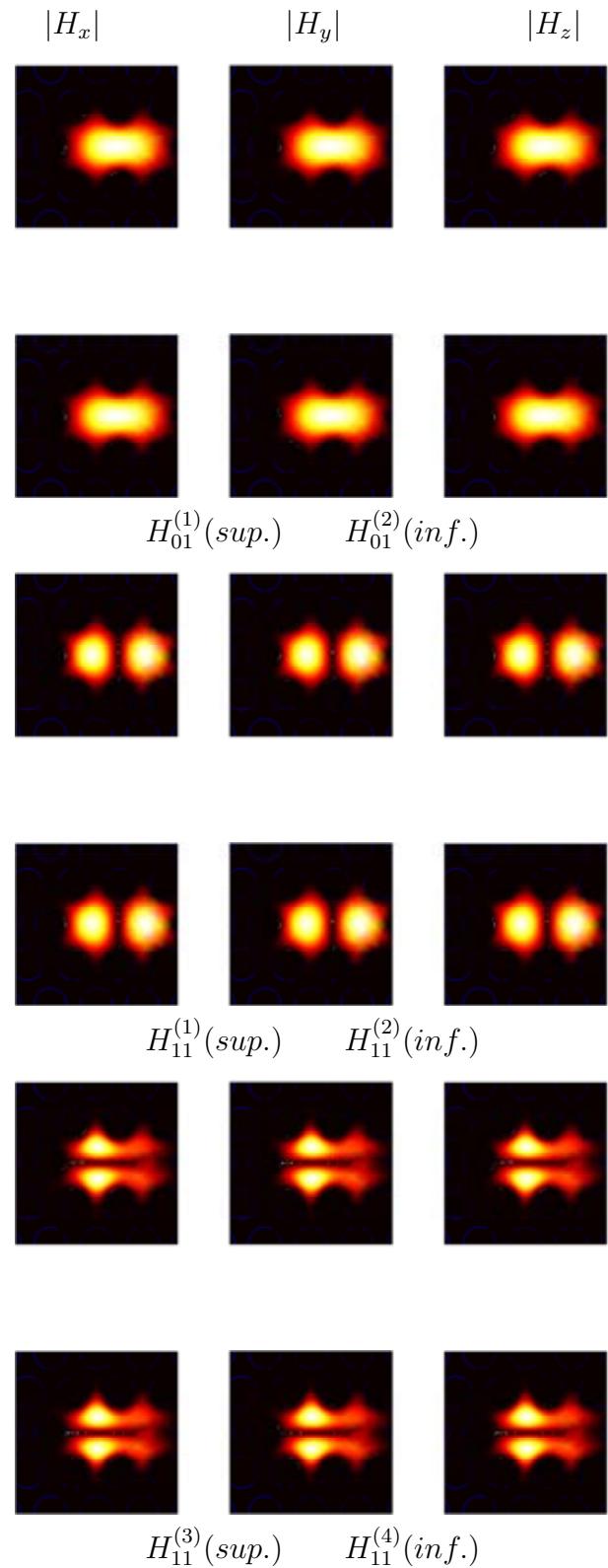


Figura 7.8: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con un hueco ausente.

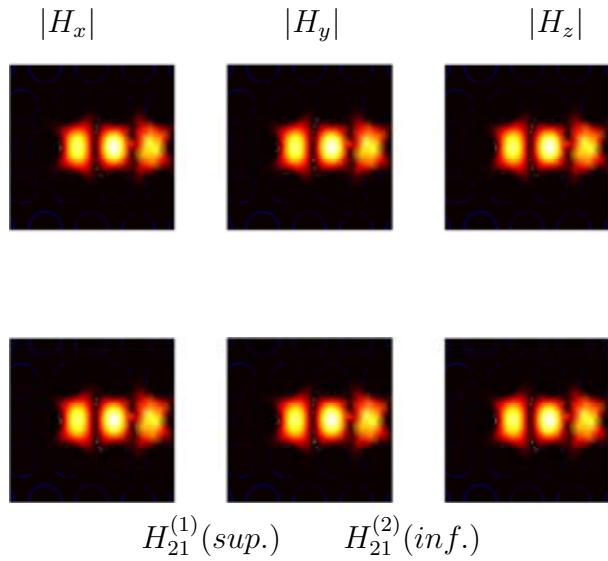


Figura 7.8 (continuación)

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01_{D1}}^{(1)}$	1,479852	$3,536204 \cdot 10^{-25}$
$H_{01_{D1}}^{(2)}$	1,479852	$-6,161389 \cdot 10^{-25}$
$H_{01_{D2}}^{(1)}$	1,479851	$3,534424 \cdot 10^{-25}$
$H_{01_{D2}}^{(2)}$	1,479851	$6,972052 \cdot 10^{-25}$
$H_{11_{D1}}^{(1)}$	1,479629	$-4,651117 \cdot 10^{-25}$
$H_{11_{D1}}^{(2)}$	1,479629	$-9,063468 \cdot 10^{-25}$
$H_{11_{D1}}^{(3)}$	1,479628	$7,901898 \cdot 10^{-26}$
$H_{11_{D1}}^{(4)}$	1,479628	$8,628600 \cdot 10^{-26}$
$H_{11_{D2}}^{(1)}$	1,479624	$3,528923 \cdot 10^{-22}$
$H_{11_{D2}}^{(2)}$	1,479624	$3,164111 \cdot 10^{-22}$
$H_{11_{D2}}^{(3)}$	1,479623	$1,334013 \cdot 10^{-21}$
$H_{11_{D2}}^{(4)}$	1,479623	$1,354904 \cdot 10^{-21}$

Tabla 7.4: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.9.

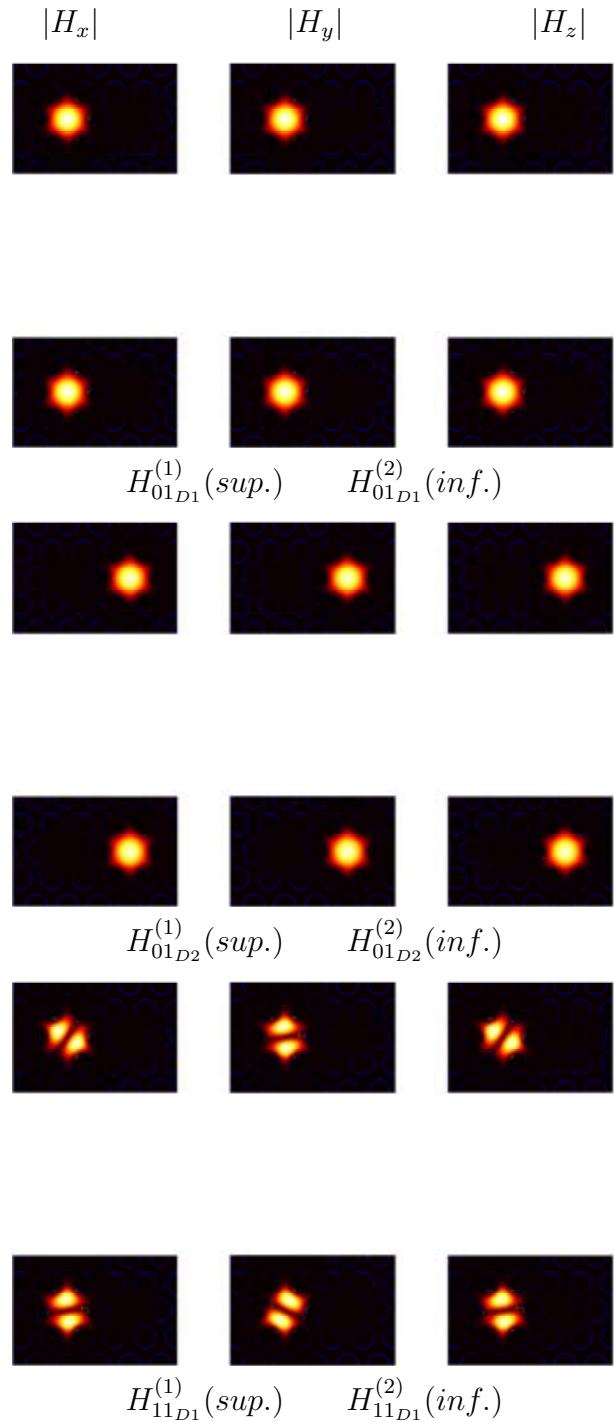


Figura 7.9: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 16\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con un hueco ausente.

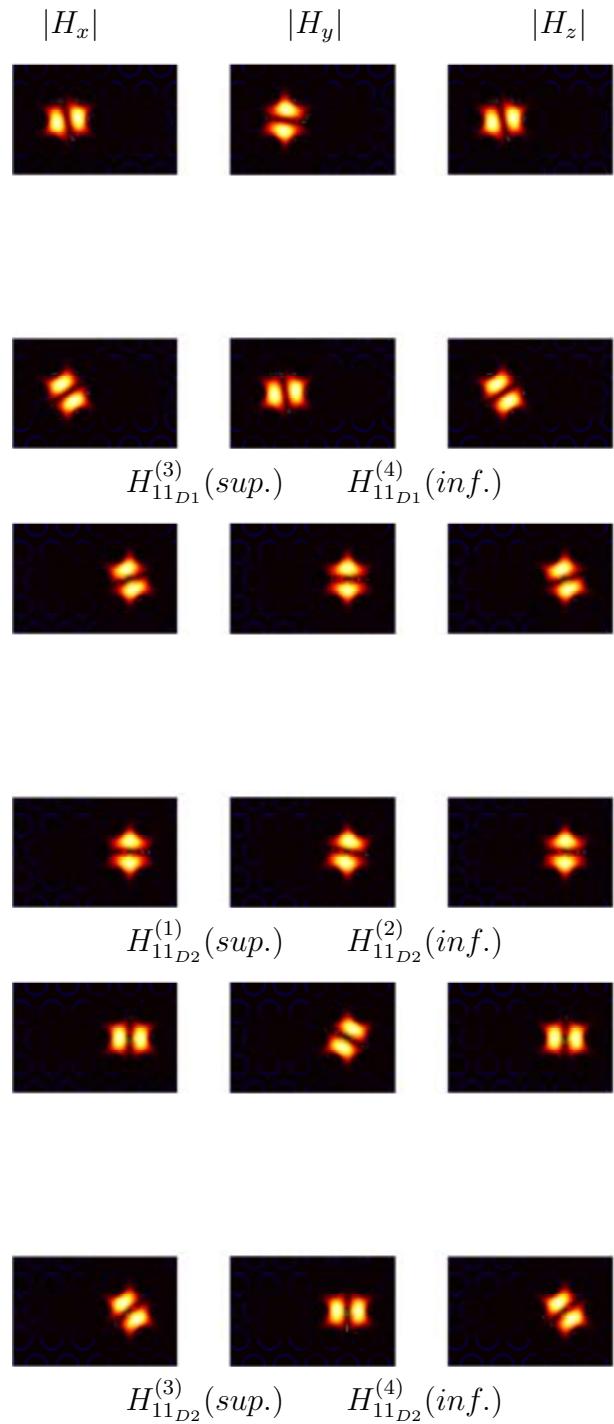


Figura 7.9 (continuación)

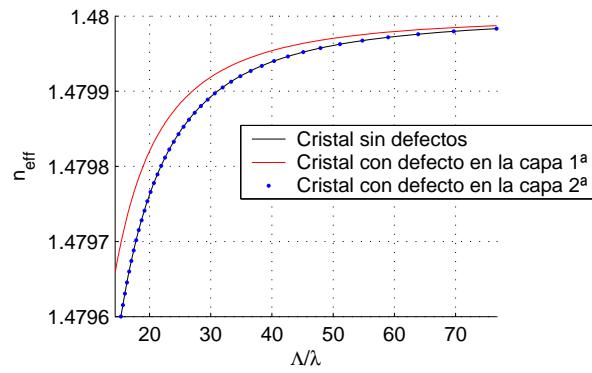


Figura 7.10: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibras con $d_h = 16\mu\text{m}$ y $\Lambda = 23\mu\text{m}$, donde en dos de ellas se ha eliminado un hueco hueco.

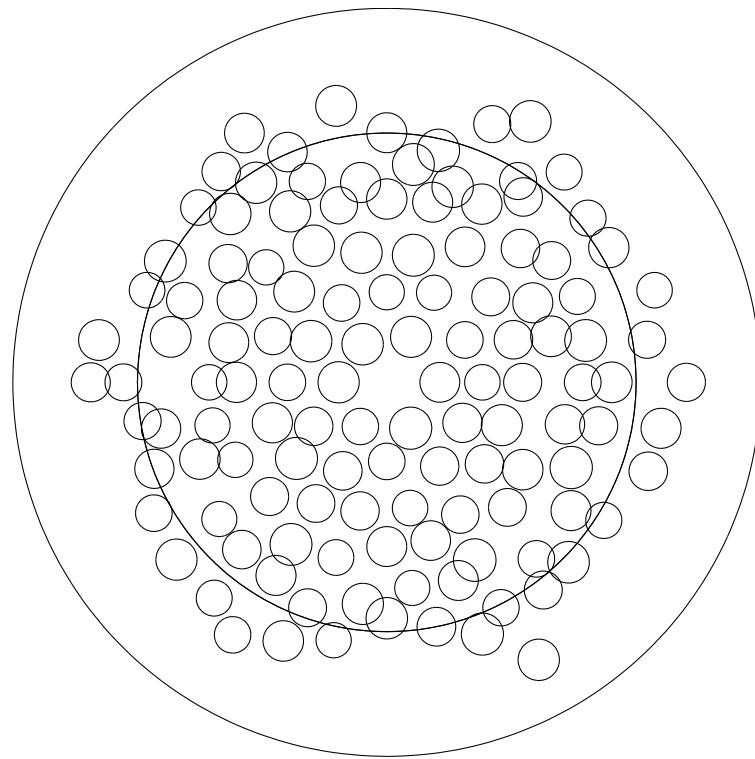


Figura 7.11: Geometría de cristal fotónico con un 10 % de defectos introducidos de forma aleatoria.

son defectos muy severos. Los modos fundamentales obtenidos en estas fibras defectuosas son prácticamente idénticos a los obtenidos en la fibra ideal, con la particularidad, ya vista en otras ocasiones, de la adaptación del modo al defecto o núcleo deformado.

Uno de los aspectos más destacados lo constituye el hecho de que, si la deformación es lo suficientemente importante como para que se produzca la aparición de nuevas zonas de propagación en el revestimiento, éstas constituirán zonas de propagación de modos que, en capítulos precedentes, demostramos que eran evanescentes. En conclusión, el desorden ocasionado por los defectos de fabricación puede traer consigo la aparición de nuevos modos evanescentes (ver figura 7.12).

También hemos comparado la dispersión que se produce en este tipo de fibra defectuosa con respecto a la ideal. Los resultados se exponen en la figura 7.13.

7.3. Otras geometrías de cristal fotónico

Las fibras de cristal fotónico pueden presentar infinidad de geometrías distintas, tanto en la forma de los huecos como en la distribución de los mismos en la fibra. A continuación, se expondrán algunos resultados obtenidos para fibras con geometrías distintas a las presentadas hasta el momento.

7.3.1. Fibras hexagonales con huecos de forma elíptica

En primer lugar, se propone el uso de huecos elípticos en lugar de huecos circulares (ver figura 7.14) [31].

La figura 7.15 y la tabla 7.5 muestran la forma y los valores de los índices de refracción efectivos respectivamente, de los modos principales que se propagan en el cristal elíptico. Se puede ver que el modo se deforma para adaptarse a los lugares entre huecos, de forma que tenemos “picos” de distinto tamaño.

En la figura 7.16 representamos la evolución del modo fundamental de la fibra elíptica conforme aumenta la frecuencia normalizada. El comportamiento mostrado no nos aporta nada novedoso pues la tendencia es del todo similar a las fibras de cristal fotónico hexagonales ya estudiadas en el capítulo anterior.

7.3.2. Fibras octogonales

Otra geometría alternativa pudiera ser el uso de una distribución octogonal de agujeros en lugar de la típica hexagonal. Esta geometría (ver figura 7.17) no es periódica, aunque el índice de refracción medio de la zona de huecos es suficientemente uniforme como para que los modos se den tan sólo en la zona del defecto.

La figura 7.18 y la tabla 7.6 muestra los resultados obtenidos para esta fibra.

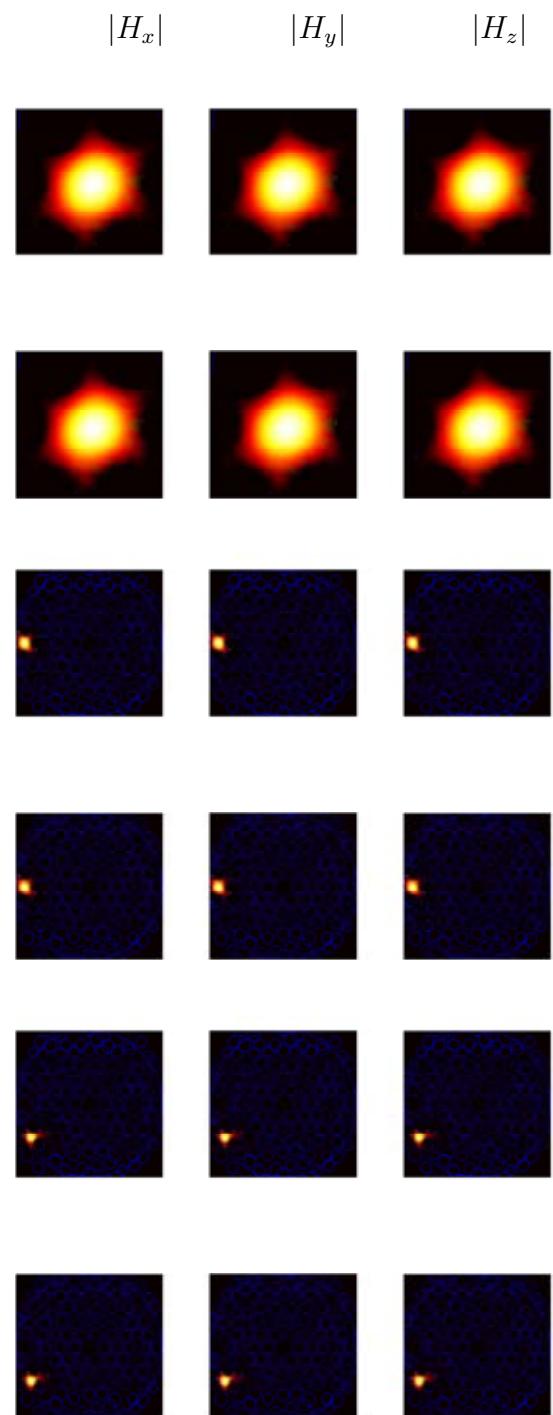


Figura 7.12: Modos normales en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 900 nm con un diámetro de hueco $d_h = 18,4\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$ con una deformación aleatoria del 10 %.

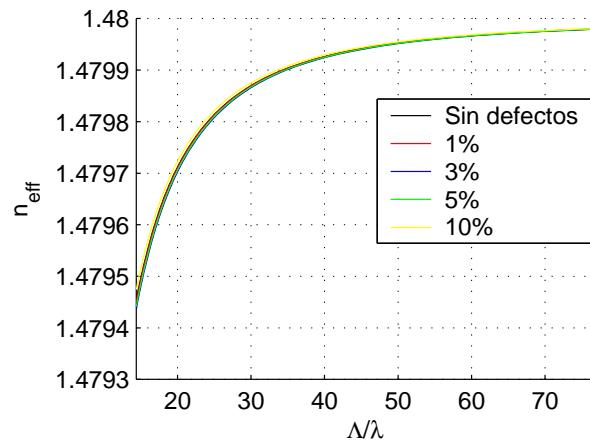


Figura 7.13: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1500 nm en cristal fotónico con defectos aleatorios.

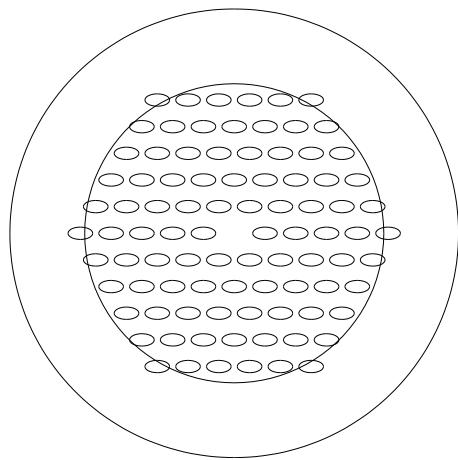


Figura 7.14: Fibra con huecos de forma elíptica, con semiejes mayor y menor de $6\mu\text{m}$ y $3\mu\text{m}$ respectivamente y $\Lambda = 15\mu\text{m}$.

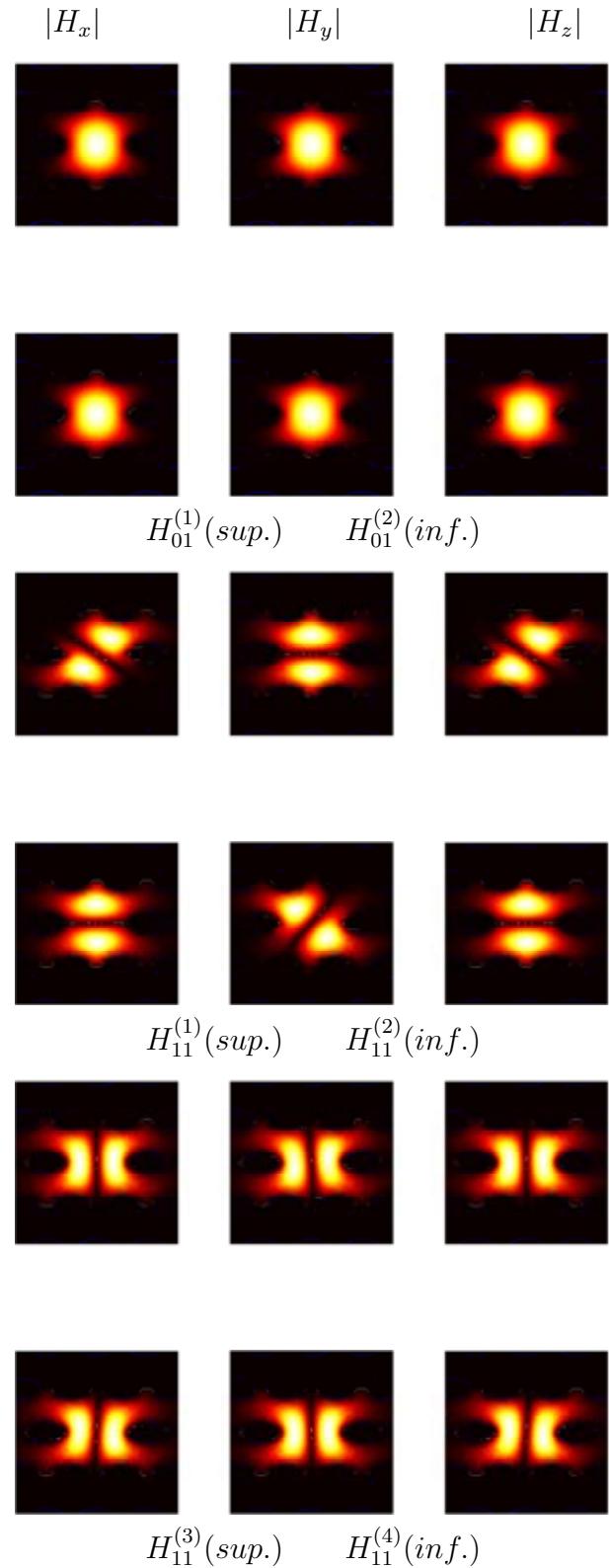


Figura 7.15: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico, a una longitud de onda de 600 nm con semiejes mayor y menor de $6\mu\text{m}$ y $3\mu\text{m}$ respectivamente y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 15\mu\text{m}$.

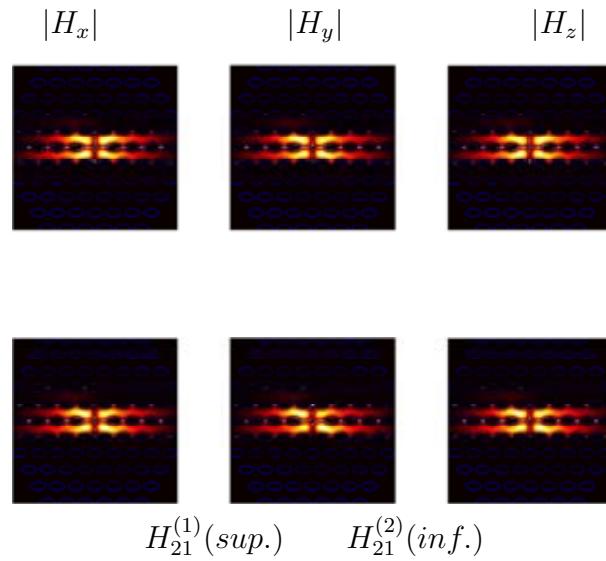


Figura 7.15 (continuación)

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,479866	$1,157930 \cdot 10^{-23}$
$H_{01}^{(2)}$	1,479866	$1,168141 \cdot 10^{-23}$
$H_{11}^{(1)}$	1,479694	$8,961142 \cdot 10^{-18}$
$H_{11}^{(2)}$	1,479694	$8,892025 \cdot 10^{-18}$
$H_{11}^{(3)}$	1,479663	$3,211848 \cdot 10^{-16}$
$H_{11}^{(4)}$	1,479663	$3,277785 \cdot 10^{-16}$
$H_{11}^{(1)}$	1,479560	$9,171422 \cdot 10^{-10}$
$H_{11}^{(2)}$	1,479560	$9,320578 \cdot 10^{-10}$

Tabla 7.5: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.15.

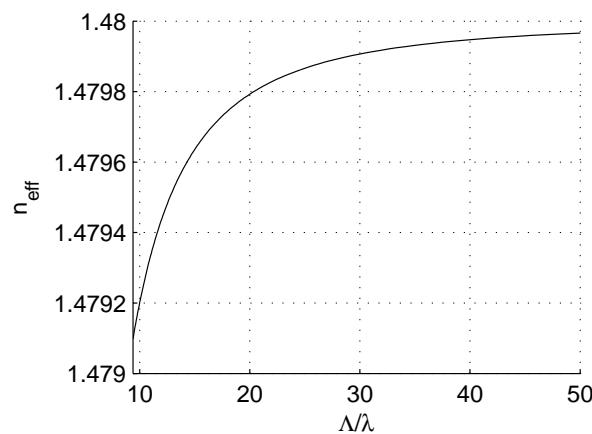


Figura 7.16: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibra elíptica con $\Lambda = 15 \mu m$ con semiejes mayor y menor de $6 \mu m$ y $3 \mu m$ respectivamente.

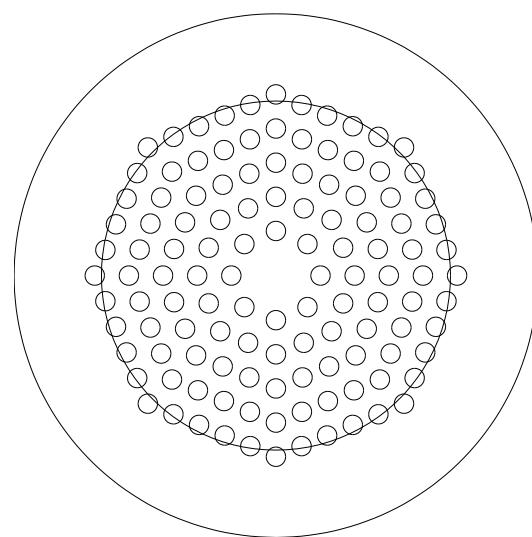


Figura 7.17: Geometría de cristal fotónico con huecos situados en los vértices de un octógono con $\Lambda = 23 \mu m$ y $d_h = 10 \mu m$.

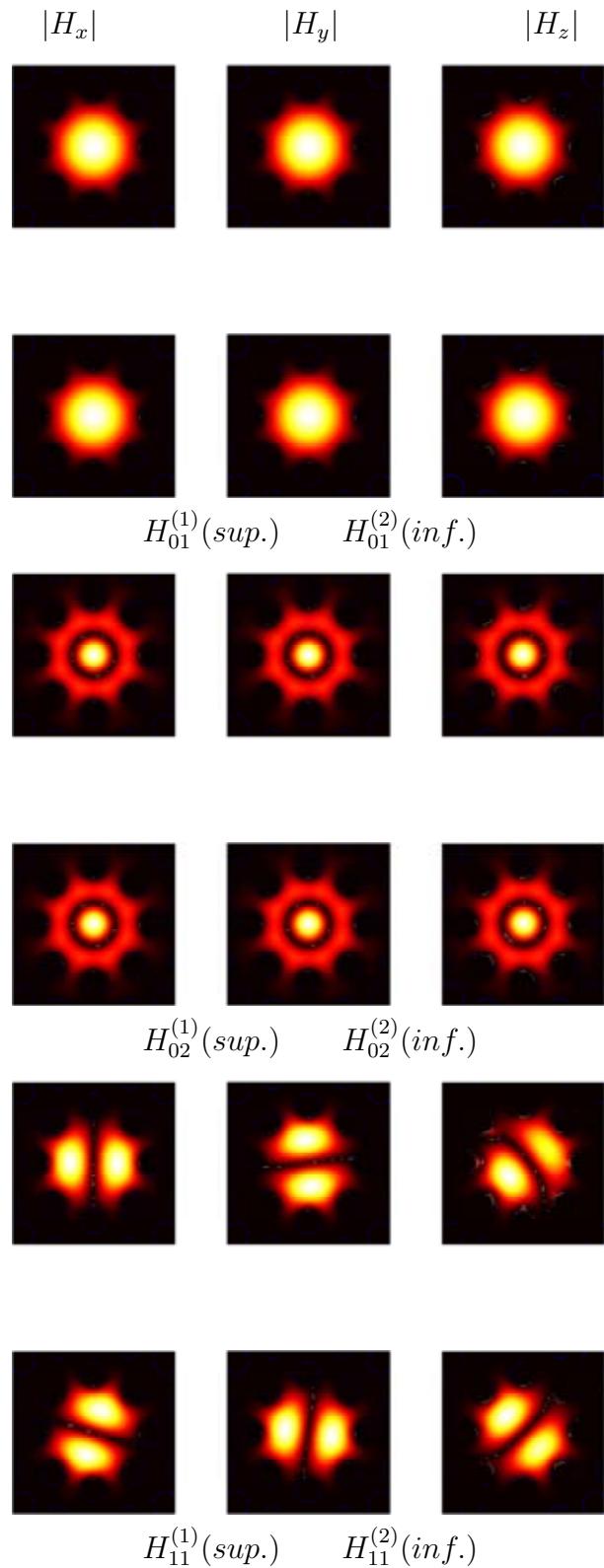


Figura 7.18: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico octogonal, a una longitud de onda de 600 nm con un diámetro de hueco $d_h = 10\mu m$ y una distancia entre dos huecos consecutivos $\Lambda = 23\mu m$.

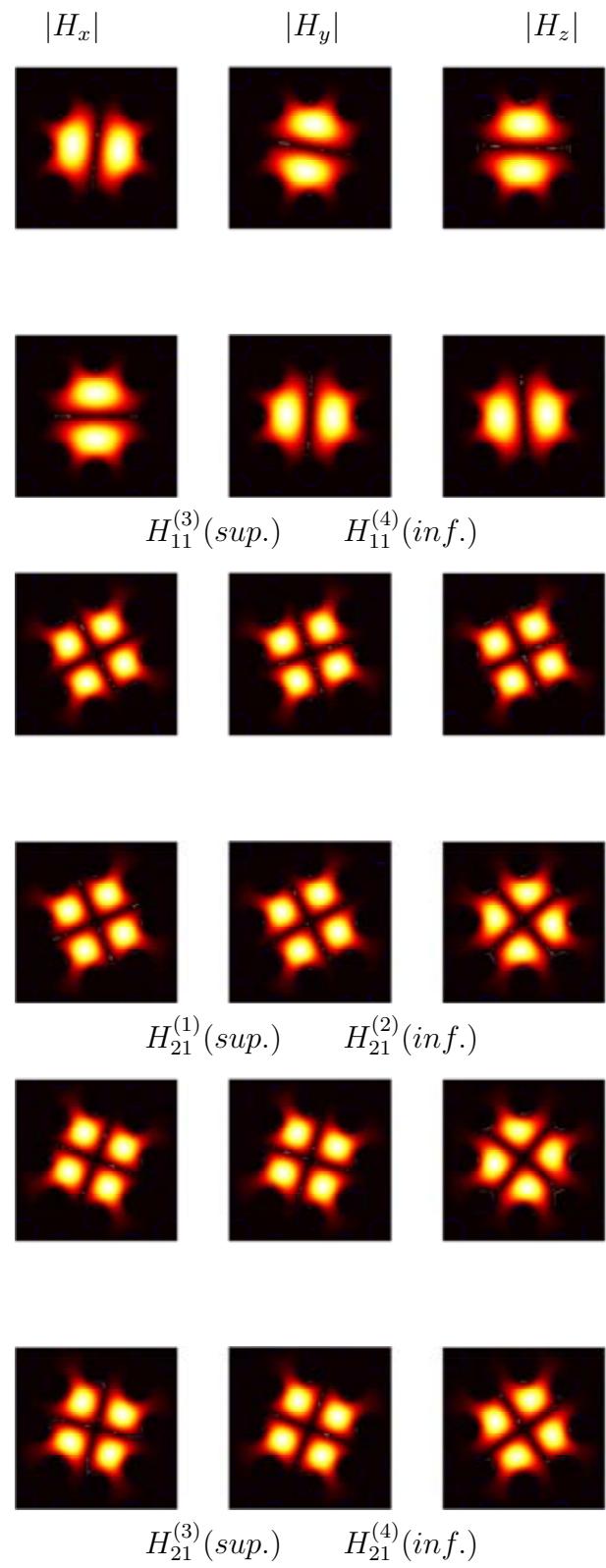


Figura 7.18 (continuación)

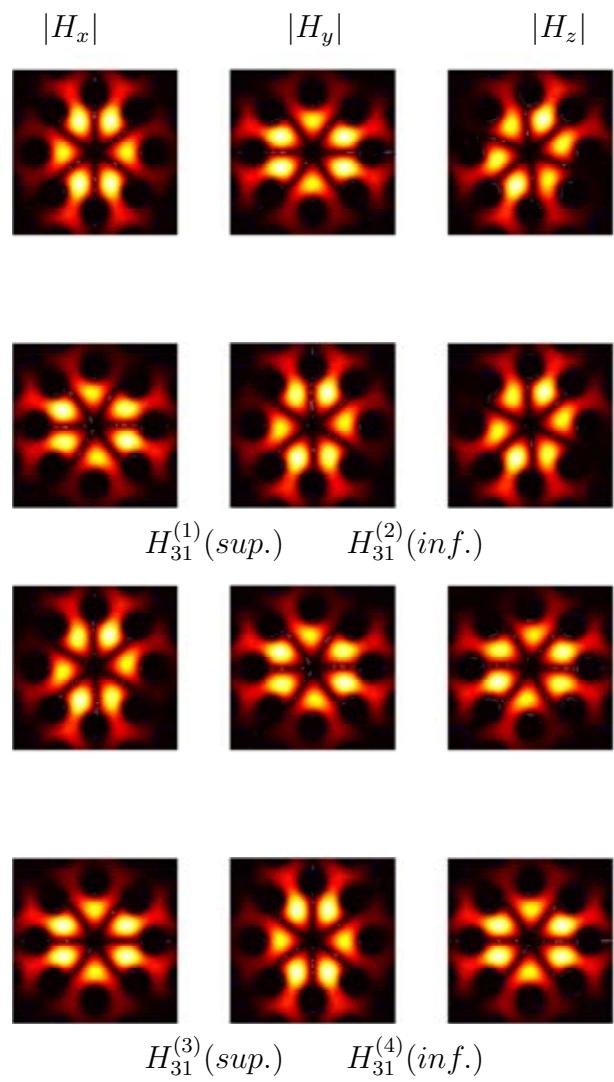


Figura 7.18 (continuación)

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,499953	$4,640852 \cdot 10^{-24}$
$H_{01}^{(2)}$	1,499953	$-8,836499 \cdot 10^{-24}$
$H_{02}^{(1)}$	1,499760	$2,913814 \cdot 10^{-23}$
$H_{02}^{(2)}$	1,499760	$-1,264960 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(1)}$	1,499882	$5,212976 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(2)}$	1,499882	$5,430161 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(3)}$	1,499882	$-2,132851 \cdot 10^{-22}$
$H_{11}^{(4)}$	1,499882	$-8,838541 \cdot 10^{-24}$
$H_{21}^{(1)}$	1,499791	$-2,238076 \cdot 10^{-23}$
$H_{21}^{(2)}$	1,499791	$-1,817719 \cdot 10^{-22}$
$H_{21}^{(3)}$	1,499791	$-2,394782 \cdot 10^{-23}$
$H_{21}^{(4)}$	1,499791	$-3,447213 \cdot 10^{-23}$
$H_{31}^{(1)}$	1,499691	$9,141142 \cdot 10^{-21}$
$H_{31}^{(2)}$	1,499691	$7,194946 \cdot 10^{-21}$
$H_{31}^{(3)}$	1,499691	$3,483021 \cdot 10^{-21}$
$H_{31}^{(4)}$	1,499691	$8,399150 \cdot 10^{-21}$

Tabla 7.6: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.18.

Por último, mostramos en la figura 7.19 la evolución del modo fundamental de la fibra octogonal. Puesto que este tipo de geometría no tiene diferencias esenciales con la geometrías hexagonal, la tendencia observada es idéntica a la presentada por ésta última.

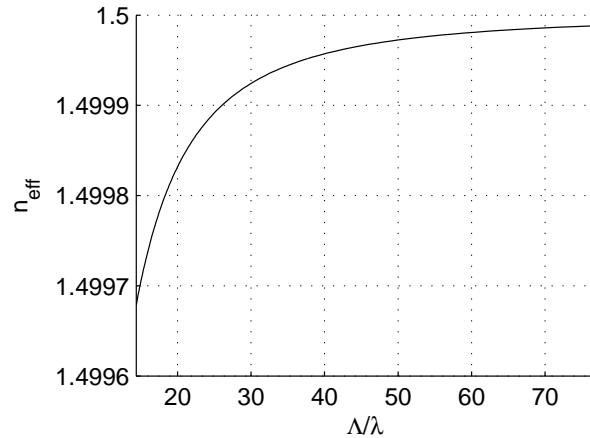


Figura 7.19: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibra octogonal con $\Lambda = 23\mu\text{m}$ y $d_h = 10\mu\text{m}$.

7.3.3. Fibras cilíndricas

Una última geometría que se ha propuesto en el presente proyecto consiste en una distribución cilíndrica de agujeros como se muestra en la figura 7.20. El diámetro de los mismos es función de la separación entre capas Λ , del número de divisiones en que se desee separar a cada capa y de la capa a la que pertenezcan. Para la simulación se ha usado un cristal cilíndrico con $\Lambda = 5\mu\text{m}$ y 4 capas.

Esta geometría tiene cierta similitud a las fibras de Bragg que se estudiaron en el capítulo 5 por lo que el comportamiento esperado será del todo similar. En la figura 7.21 se representan los modos propagantes para una fibra cilíndrica determinada. En la tabla 7.7 se presentan los valores de los índices de refracción efectivos.

Por último, representamos en la figura 7.22 la dispersión del modo fundamental para este tipo de fibras.

7.4. Conclusiones

Entre las principales conclusiones que se pueden extraer del presente capítulo destaca que las fibras de cristal fotónico presentan un comportamiento bastante robusto ante

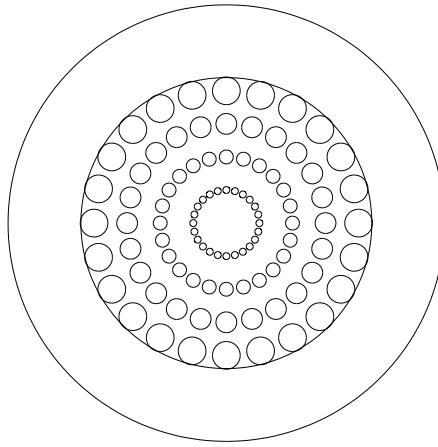


Figura 7.20: Geometría de cristal fotónico con huecos situados en una distribución cilíndrica.

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01(0)}^{(1)}$	1,479792	$-2,202046 \cdot 10^{-23}$
$H_{01(0)}^{(2)}$	1,479792	$-1,595528 \cdot 10^{-23}$
$H_{01(1)}^{(1)}$	1,479480	$-1,962411 \cdot 10^{-22}$
$H_{01(1)}^{(2)}$	1,479480	$1,405780 \cdot 10^{-23}$
$H_{11(0)}^{(1)}$	1,479474	$-2,723175 \cdot 10^{-25}$
$H_{11(0)}^{(2)}$	1,479472	$-1,486861 \cdot 10^{-24}$
$H_{11(0)}^{(3)}$	1,479472	$-3,892929 \cdot 10^{-25}$
$H_{11(0)}^{(4)}$	1,479471	$5,728612 \cdot 10^{-26}$
$H_{11(1)}^{(1)}$	1,479467	$-1,061815 \cdot 10^{-25}$
$H_{11(1)}^{(2)}$	1,479465	$-2,699177 \cdot 10^{-26}$
$H_{11(1)}^{(3)}$	1,479465	$3,547201 \cdot 10^{-26}$
$H_{11(1)}^{(4)}$	1,479462	$-1,490133 \cdot 10^{-26}$
$H_{21(1)}^{(1)}$	1,479419	$2,051766 \cdot 10^{-23}$
$H_{21(1)}^{(2)}$	1,479419	$9,414019 \cdot 10^{-24}$
$H_{21(1)}^{(3)}$	1,479419	$-1,999914 \cdot 10^{-23}$
$H_{21(1)}^{(4)}$	1,479419	$2,031967 \cdot 10^{-24}$

Tabla 7.7: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 7.21

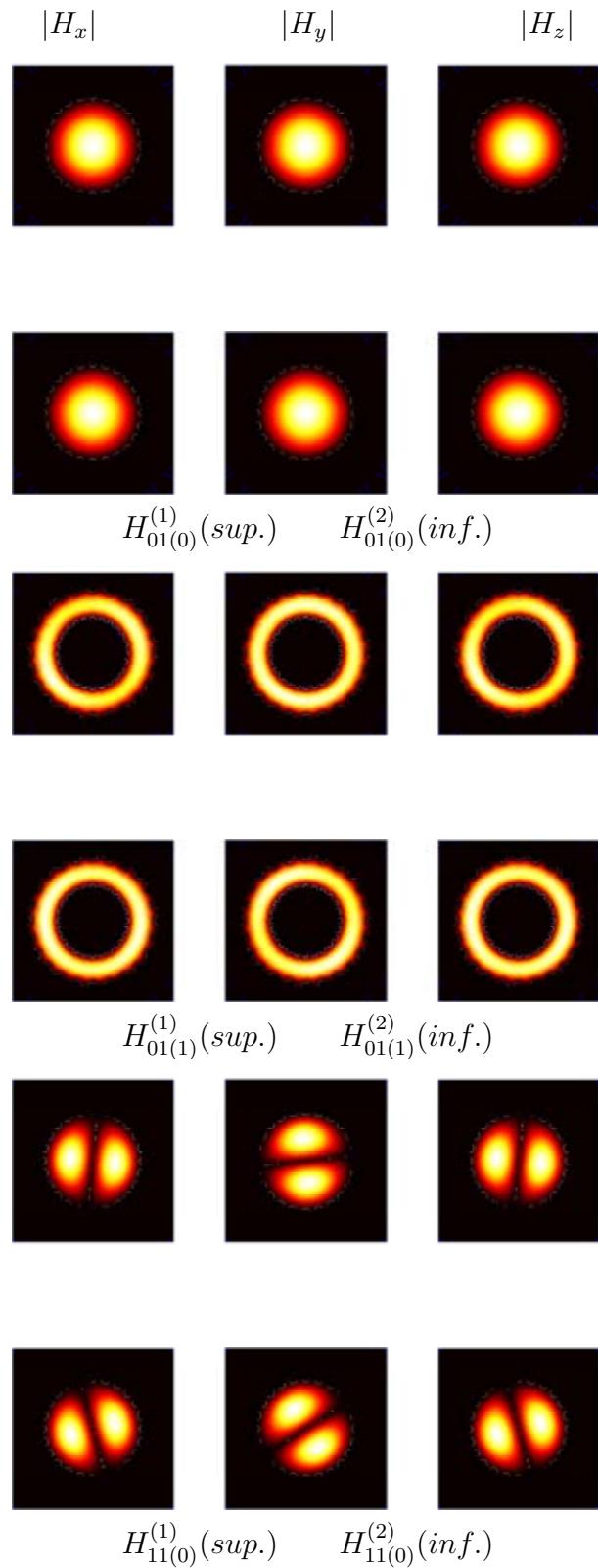


Figura 7.21: Modos propagantes en fibra de cristal fotónico cilíndrica, a una longitud de onda de 300 nm con una separación entre capas $\Lambda = 5\mu m$.

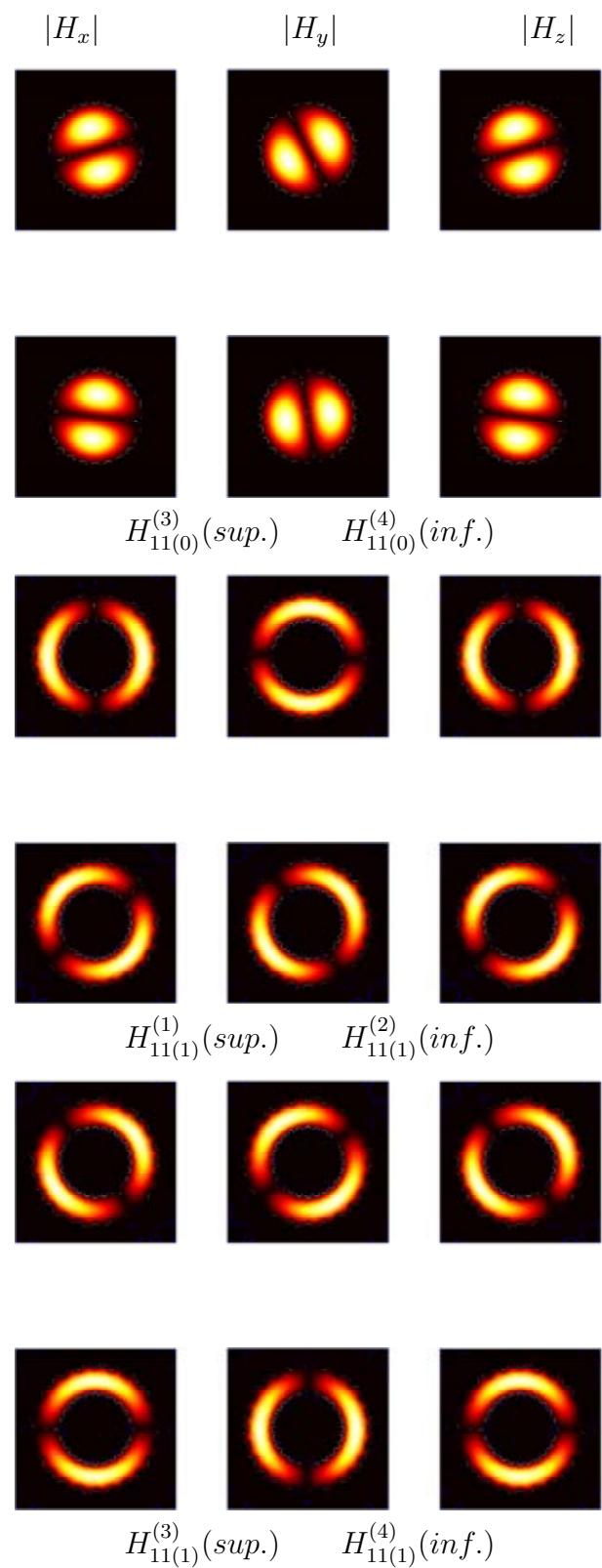


Figura 7.21 (continuación)

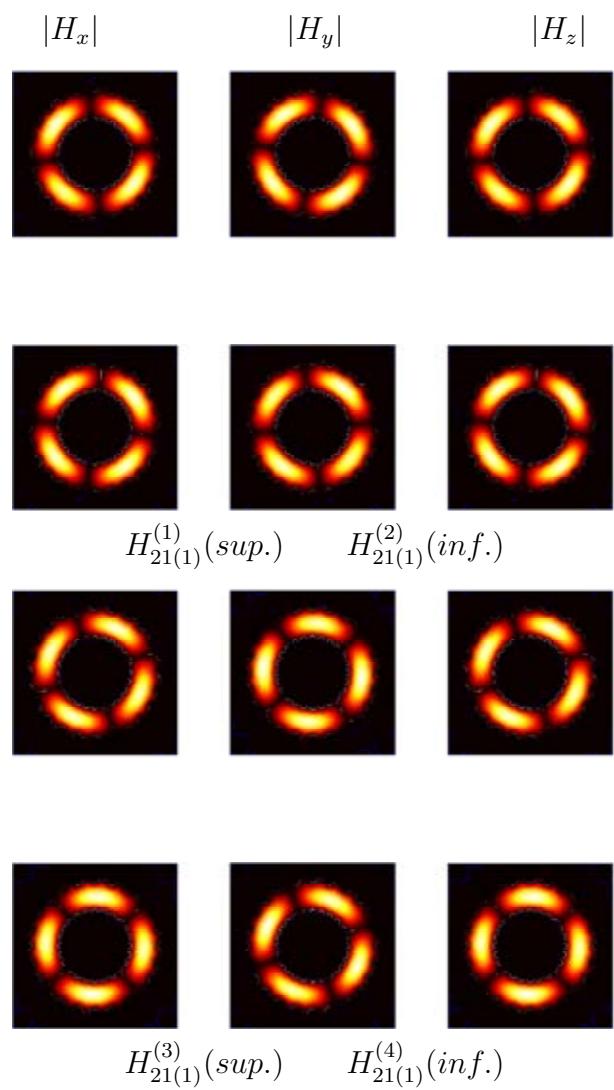


Figura 7.21 (continuación)

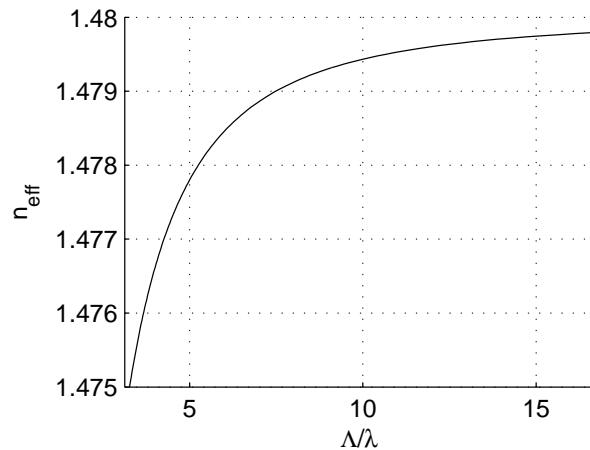


Figura 7.22: Índices de refracción efectivo del primer modo para longitudes de onda entre 300 nm y 1600 nm en fibra cilíndrica con $\Lambda = 5 \mu m$.

pequeñas imperfecciones, tales como huecos de tamaño distinto a los huecos originales. Ante la ausencia de un hueco, su comportamiento se puede considerar aceptable, pese a la existencia de modos de propagación distintos a los habituales. Este es un comportamiento lógico, ya que se crea una segunda zona donde hay defecto, propagándose modos en dichas zonas. No obstante, los valores del número de onda no cambian de modo apreciable, siendo los resultados a pesar de ello aceptables de tal manera que la fibra pueda continuar con su cometido.

En lo que se refiere a geometrías diferentes a la hexagonal, podemos decir que el campo magnético se adapta al defecto introducido por la nueva configuración de agujeros obteniéndose modos e índices de refracción similares a los mostrados en el capítulo 6.

Capítulo 8

Fibras *Tapered*

8.1. Introducción

Las fibras de cristal fotónico estrechadas por fusión y estiramiento (*tapered*) constituyen una particular versión de los cristales fotónicos estudiados en el capítulo 6 en las que las dimensiones fundamentales (Λ, d_h) de la fibra disminuyen hasta el orden de los 300 nm (ver figura 8.1) [32, 33, 34, 35, 36, 37].

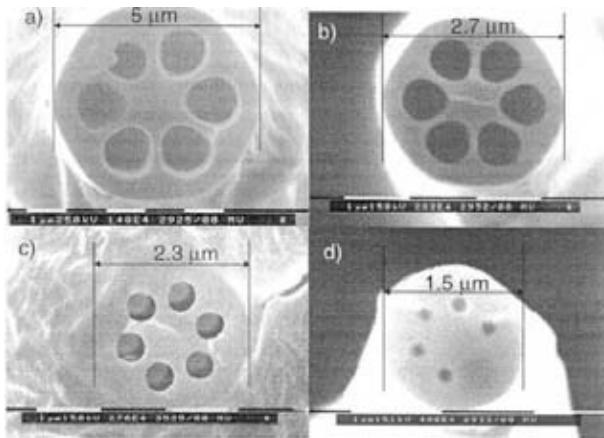


Figura 8.1: Representación real de fibras (*tapered*) con una sola capa de agujeros de aire [34].

Es por ello que el diámetro exterior de la fibra pasa a ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de la señal portadora para el rango de éstas que se están considerando en el presente proyecto.

Para conseguir este propósito aplicamos una técnica estándar de quemado con llama mediante la cual la fibra es calentada con una llama de butano mientras es simultáneamente estirada mediante fases de motorizado (ver figura 8.2). Durante este proceso, la

viscosidad disminuye en la sección calentada de la fibra, permitiendo el flujo de gases. Un rango de perfiles de calentamiento de llama puede ser aplicado para conseguir la variación longitudinal específica deseada en el diámetro exterior (D) de la fibra.

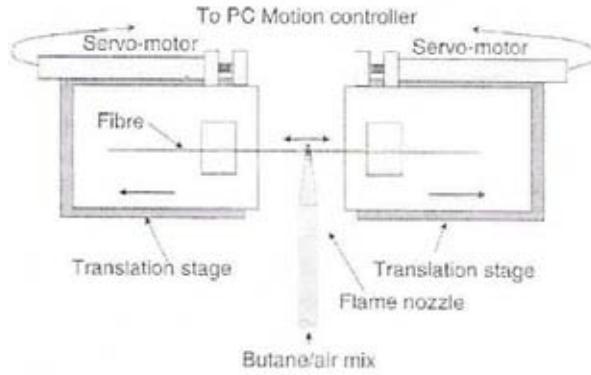


Figura 8.2: Diagrama esquemático del proceso de fusión y estiramiento para una fibra de cristal fotónico [33].

Para que las fibras *tapered* sean adiabáticas y posean pérdidas bajas, criterios deseados de diseño, es necesario preservar la estructura de la sección transversal. La dinámica del flujo de materiales durante el estrechamiento es gobernada por la distribución local de calor, la viscosidad resultante y la tensión superficial del silicio, la tasa de estiramiento y, en el caso de cristales fotónicos y otras fibras microestructuradas, la presión del gas en el interior de los agujeros.

Cuando los parámetros de calentamiento y estiramiento producen una tensión insuficiente en la dirección axial de la fibra, la tensión superficial domina frente a la dinámica de flujos y el flujo de material aumenta en la dirección transversal, resultando el colapso de los agujeros de aire.

8.2. Implementación numérica del problema

Los modos de propagación en cristales fotónicos estrechados tienden a ocupar toda la fibra puesto que la señal portadora no cabe en el defecto. Por esta razón, el confinamiento ahora no viene producido por un revestimiento ficticio, como lo hacía en el capítulo 6, sino que es el ambiente exterior el encargado de conducir la señal por la fibra. Es por ello por lo que la implementación numérica del problema debe sufrir algunos cambios significativos, sobre todo a lo que se refiere al diseño de la geometría, el mallado de la estructura y la condición de contorno absorbente PML.

En la figura 8.3 se muestra el dominio numérico del problema donde se ha introducido una capa de aire exterior entre la fibra física y la capa PML. Por lo que se refiere al

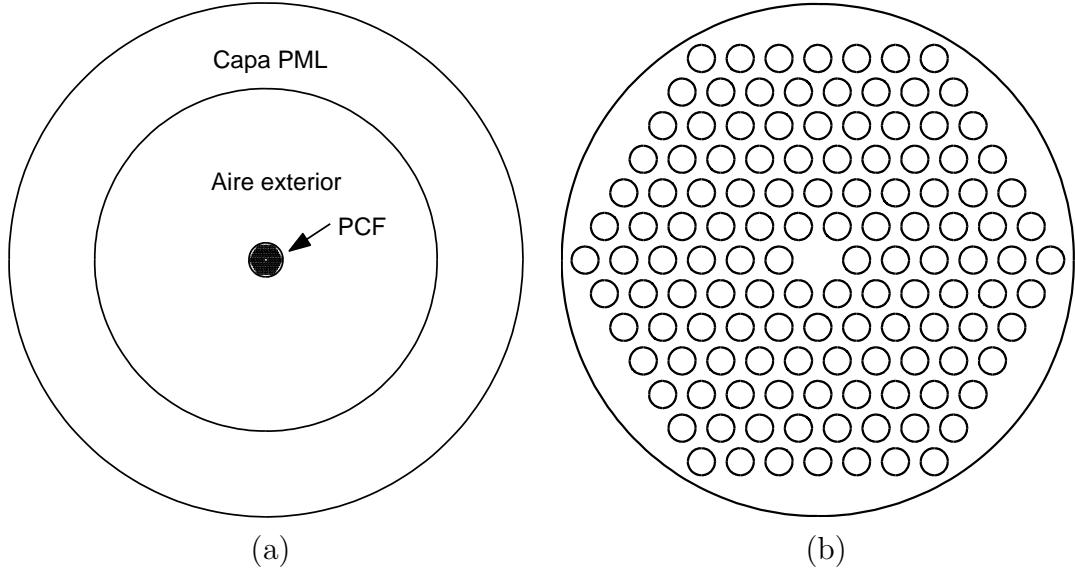


Figura 8.3: (a) Geometría de cristal fotónico estrechado (*tapered*) con el aire exterior para el confinamiento de los modos. (b) Zoom de la figura (a) donde se muestra sólo la geometría del cristal fotónico estrechado (*tapered*).

mallado, sólo se refinará el dominio físico (ver figura 8.4) de la geometría que es lo que presenta una mayor importancia pues es en él donde se propagará la señal. La capa PML se implementará de la misma forma que se viene haciendo hasta ahora.

8.3. Resultados experimentales

En primer lugar, comprobaremos la evolución del modo fundamental en una fibra de cristal fotónico con una relación $d_h/\Lambda = 0,7$ y una relación $D/\Lambda = 13,2$ conforme la relación D/λ disminuye siendo D el diámetro de la fibra. La longitud de onda de la señal portadora λ será de 1000 nm. De esta manera, podremos caracterizar el proceso de estrechamiento que experimentan las fibras *tapered* y obtener un valor crítico de $(D/\lambda)_c$ a partir del cual el modo se propaga por toda la sección de la fibra llegando incluso a hacerlo por el ambiente exterior. La figura 8.5 ilustra el modo fundamental en la sección transversal así como módulo del vector campo magnético transversal para varios regímenes de operación.

Se puede apreciar que, en el momento en que la longitud de onda no cabe en la longitud característica del defecto, que puede venir dada por

$$D_d = 2\Lambda - d_h = 2\Lambda - 0,7\Lambda = 1,3\Lambda \quad (8.1)$$

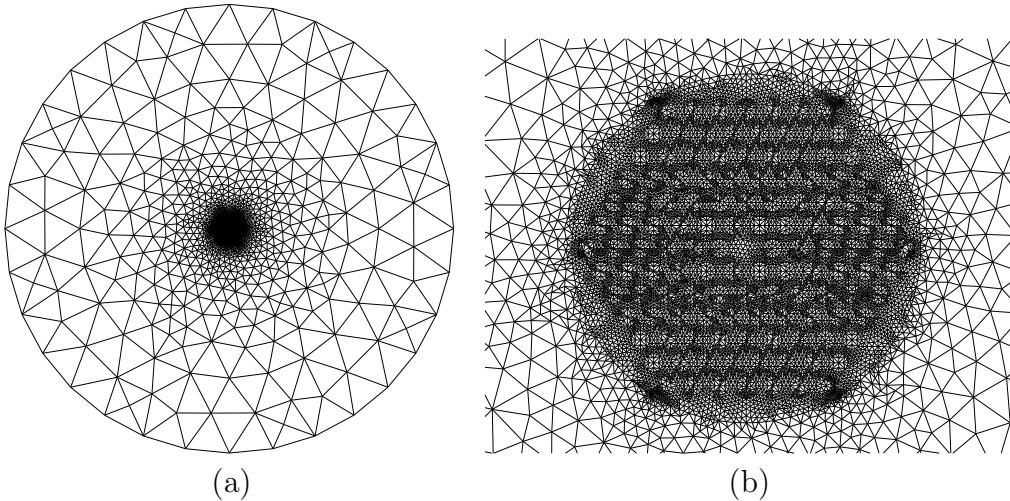


Figura 8.4: (a) Malla de cristal fotónico estrechado (*tapered*) con el aire exterior para el confinamiento de los modos. (b) Zoom de la figura (a) donde se muestra sólo la geometría del cristal fotónico estrechado (*tapered*).

	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(a)}$	1,425154	$-6,967719 \cdot 10^{-26}$
$H_{01}^{(b)}$	1,387820	$-9,434748 \cdot 10^{-26}$
$H_{01}^{(c)}$	1,348508	$3,613334 \cdot 10^{-23}$
$H_{01}^{(d)}$	1,251956	$2,913085 \cdot 10^{-20}$
$H_{01}^{(e)}$	1,185840	$5,037874 \cdot 10^{-16}$

Tabla 8.1: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para la figura 8.5.

entonces el modo debe propagarse por toda la sección de la fibra. Si refinamos los resultados de la figura 8.5 concluiremos pues que, para que el modo se propague por el defecto se debe cumplir que

$$D_d/\lambda > 1,3/1,8 \approx 0,722 \quad (8.2)$$

que en nuestro ejemplo supone que

$$\Lambda/\lambda > 1/1,8 \approx 0,555 \quad (8.3)$$

En la tabla 8.1 se muestran los índices de refracción efectivos de los modos fundamentales obtenidos en cada una de las etapas del proceso de estrechamiento de la fibra.

A continuación, demostraremos cómo los defectos de fabricación tienen en este tipo de fibras mucha importancia pues, al contrario de lo que ocurría con los cristales fotónicos

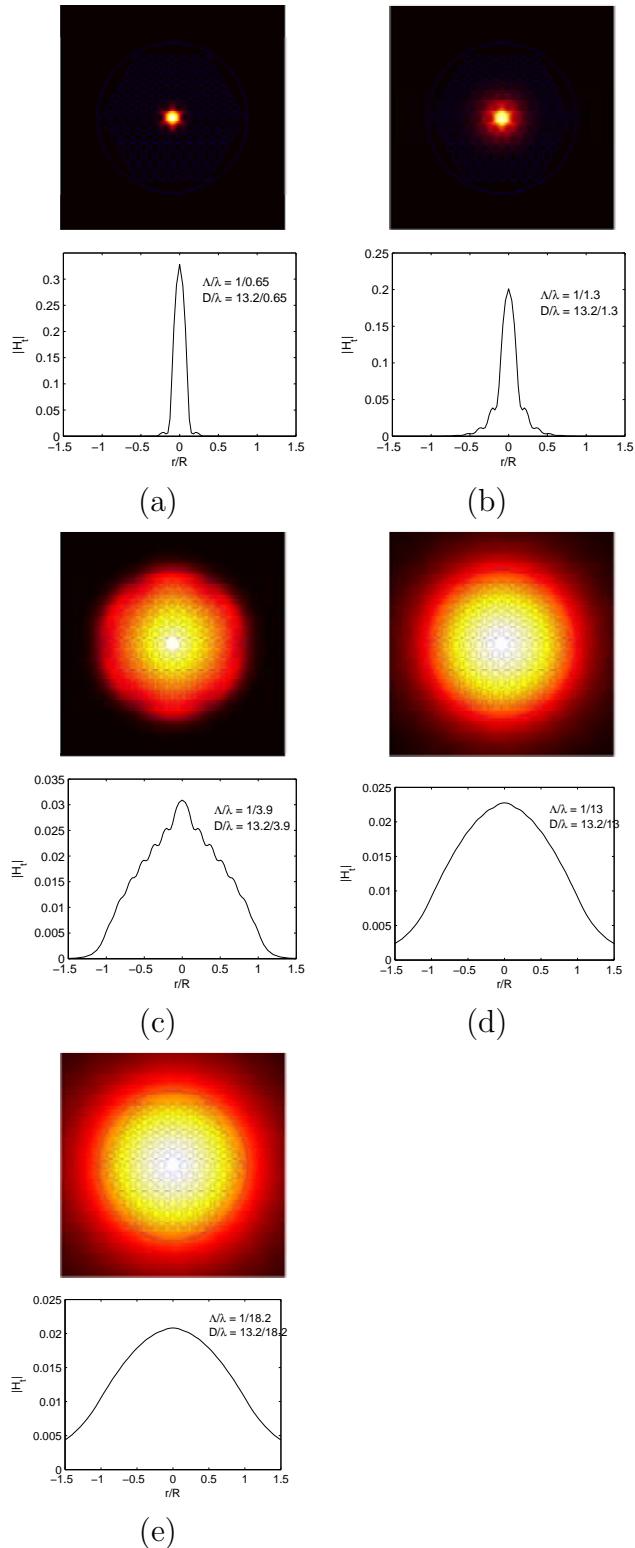


Figura 8.5: Evolución del modo fundamental conforme la relación entre el diámetro exterior y la longitud de onda, D/λ , va disminuyendo a una longitud de onda de 1000 nm (estrechamiento de la fibra).

	0 %		10 %	
	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$	$\Re(n_{eff})$	$\Im(n_{eff})$
$H_{01}^{(1)}$	1,331305	$-1,124194 \cdot 10^{-25}$	1,325200	$-1,141422 \cdot 10^{-24}$
$H_{01}^{(2)}$	1,331229	$4,185752 \cdot 10^{-26}$	1,324722	$-7,444614 \cdot 10^{-26}$
$H_{11}^{(1)}$	1,313591	$5,423302 \cdot 10^{-25}$	1,305884	$3,653302 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(2)}$	1,310818	$-1,759694 \cdot 10^{-20}$	1,302991	$1,059439 \cdot 10^{-24}$
$H_{11}^{(3)}$	1,310101	$-7,595125 \cdot 10^{-22}$	1,297569	$5,378721 \cdot 10^{-25}$
$H_{11}^{(4)}$	1,307470	$9,545738 \cdot 10^{-24}$	1,295652	$9,180816 \cdot 10^{-24}$

Tabla 8.2: Valores del índice de refracción efectivo n_{eff} para los modos propagantes representados en la figura 8.6.

del capítulo 6, los modos se propagan por toda la fibra por lo que la distribución de los agujeros y sus tamaños aleatorios afectan de manera considerable al campo magnético transversal. Para ello se presenta en la figura 8.6 los 6 primeros modos propagantes para el cristal fotónico que se está simulando hasta aquí tomando el diámetro exterior $D = 3,3846\mu m$ correspondiente a la tercera etapa de estrechamiento de la figura 8.5. Los defectos introducidos se han considerado de, como máximo, un 10 % de la separación entre huecos, Λ , para todos los agujeros y para cada uno de los 3 parámetros de éstos (x_h, y_h y d_h).

Se observa, además de la tabla 8.2, que la degeneración en los modos se hace mucho menos patente que cuando se estudiaron la influencia de los defectos en cristales fotónicos. Esto se puede comprobar comparando los valores correspondientes de la parte real de los índices de refracción efectivos para cada uno de los modos representados en la figura 8.6.

8.4. Conclusiones

En este capítulo hemos tenido la oportunidad de observar la distribución transversal del campo magnético en una fibra de cristal fotónico sometido a un proceso de estrechamiento por fusión y estiramiento. Cuando el defecto de la fibra no es suficiente para ubicar la señal portadora, ésta debe distribuirse por toda la fibra. Debido a ello, los defectos aleatorios que pueda sufrir la fibra tienen una influencia mucho mayor, tanto en el índice de refracción efectivo como en el campo magnético. Se ha obtenido un valor crítico de tamaño de defecto D_d en relación con la longitud de onda de la señal portadora λ a partir del cuál la propagación de la señal se expande a la totalidad de la fibra.

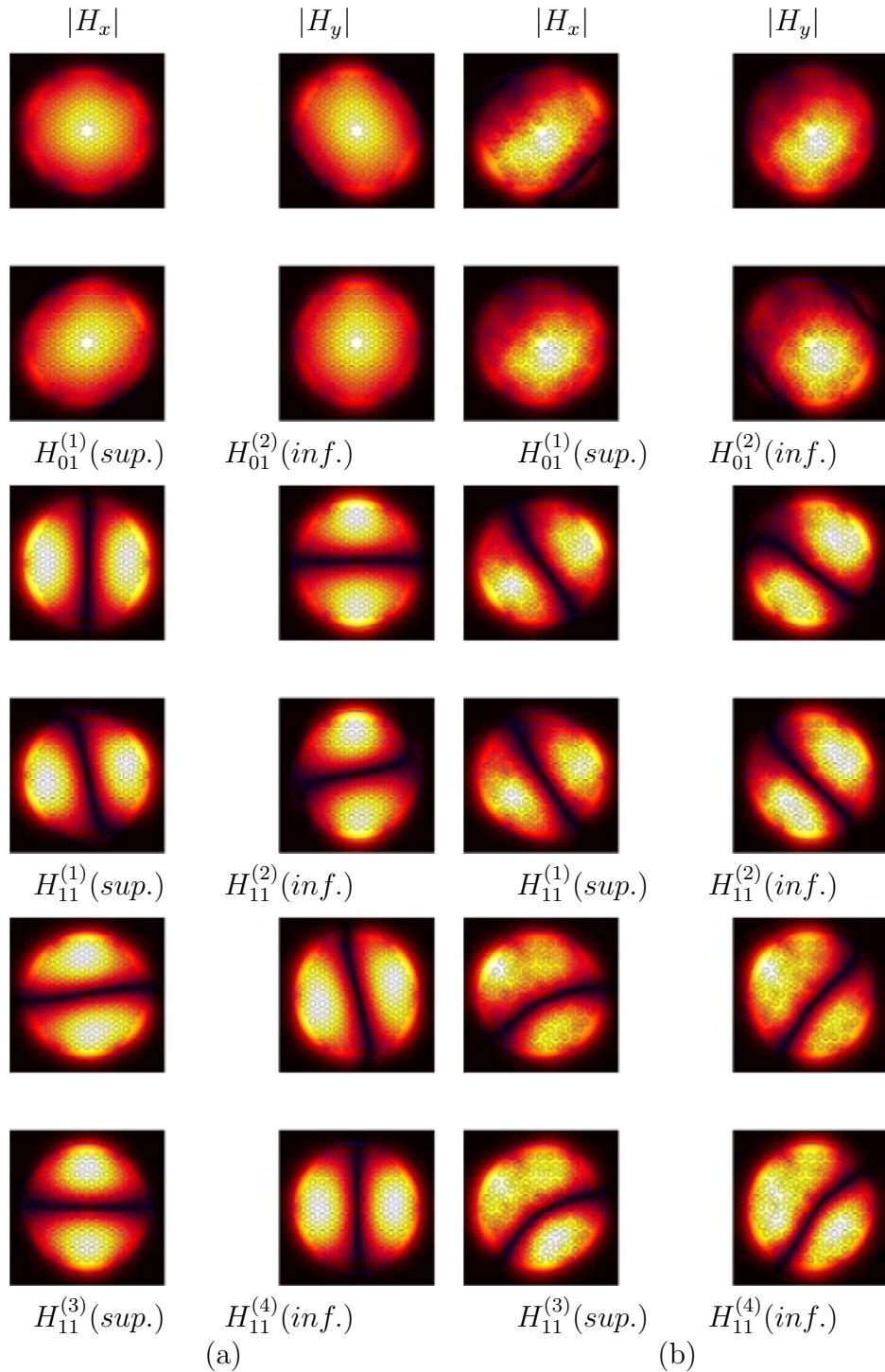


Figura 8.6: Modos normales de propagación en cristal fotónico estrechado hallado por el método vectorial de Elementos Finitos (ensamblaje normal) a una longitud de onda de 1000 nm para $\lambda = 3,9\Lambda$. (a) Cristal sin defectos de fabricación. (b) Cristal con defectos aleatorios de fabricación (10 %).

Capítulo 9

Conclusiones

9.1. Introducción

En este capítulo se presentarán las principales conclusiones extraídas del presente proyecto, explicándose brevemente los resultados obtenidos para los distintos problemas que se han planteado, así como la confianza que merecen los mismos, comparándolos con otros resultados disponibles.

Además, se comentarán otras líneas de investigación distintas relacionadas con fibras de cristal fotónico, así como posibles investigaciones futuras siguiendo la línea presentada en esta memoria.

9.2. Implementación numérica del problema

La implementación numérica del problema se ha realizado mediante el método de los Elementos Finitos. Este método ha sido ampliamente utilizados para resolver problemas en distintos campos de la física, debido a su facilidad de implementación y a los buenos resultados que se obtienen con el mismo.

El gran mérito del presente proyecto, según mi opinión, radica en la implementación numérica del método sin hacer uso para ello de ninguna función específica de MatLab. No obstante, sí que se utilizaron funciones ya implementadas para la obtención y mallado de la geometría. Para conseguir resultados fiables se ha de mallar finamente el dominio del problema, obteniéndose con ello matrices grandes para la resolución del problema. Sin embargo, con estas matrices, al ser muy poco densas *sparse*, lo que ha supuesto su principal ventaja frente a otros métodos, se consigue un ahorro en memoria y tiempo de computación muy importante.

Para tener una idea de los tiempos necesarios para el ensamblaje de las matrices y el posterior cálculo de autovalores así como la precisión del método se presenta la tabla 9.1 en la que se exponen estos valores (cálculo de los modos fundamentales) para una fibra óptica con un valor $V = 39,081$, un radio interior $R_c = 15\mu m$ y un radio exterior de

15 veces el radio interior conforme se va refinado la malla para el ensamblaje normal. Se omiten los valores del ensamblaje simplificado porque, aunque un poco menores, son prácticamente idénticos.

	Tiempo de computación (s)	Error relativo(%)
237 Nodos	8,14	$2,8728 \cdot 10^{-4}$
913 Nodos	26,14	$9,2142 \cdot 10^{-4}$
3585 Nodos	159,94	$1,7063 \cdot 10^{-5}$

Tabla 9.1: Tabla donde se exponen parámetros de rapidez y precisión del método numérico implementado (ensamblaje normal) conforme aumenta el tamaño de la malla.

A partir de la tabla 9.1 se observa claramente cómo aumenta el tiempo de computación y, a su vez, la precisión conforme mayor cantidad de nodos se maneja. Este dato, aún siendo obvio, no deja de ser relevante. Destacar aquí que el proyecto ha sido realizado en un ordenador portátil *COMPAQ Centrino* con una velocidad de procesamiento de 1.7 GHz, 512 Mb de memoria RAM y 80 Gb de disco duro.

Se han implementado dos variantes del mismo método de Elementos Finitos en la que en una de ellas se suponían constantes las propiedades ópticas en cada uno de los triángulos de la malla (ensamblaje simplificado) obteniéndose resultados casi idénticos.

Dados estos aspectos comentados, se eligió usar el método de los Elementos Finitos para resolver el problema de simulación de modos normales en cristales fotónicos, al poseer unas características a mi juicio más favorables que otros métodos numéricos.

9.3. Simulaciones numéricas realizadas

Las simulaciones numéricas que se han realizado en los distintos tipos de fibras han ido encaminadas a distintos objetivos:

- En las simulaciones con fibra óptica para la verificación de los métodos numéricos en un problema muy similar en el que se tienen resultados exactos con los que comparar.
- En fibras Bragg (*Bragg fibers*) para la comparación de los métodos implementados, a fin de realizar la elección más conveniente para la simulación de cristales fotónicos, que es el objetivo fundamental del proyecto.
- En fibras de cristal fotónico para conocer el comportamiento de estas fibras, ver su viabilidad en tareas de comunicaciones ópticas, así como conocer su robustez y su fiabilidad ante posibles fallos de fabricación, siempre atendiendo a la propagación de modos en las mismas.

9.3.1. Simulaciones en Fibras Ópticas

La simulación de fibra óptica estándar nos ha proporcionado una buena perspectiva del problema y de las dificultades que nos podrían surgir. Se ha comprobado la validez de los métodos numéricos empleados mediante la comparación de los resultados obtenidos con resultados hallados de forma analítica, encontrando una precisión bastante buena en el cálculo de los autovalores del problema (cálculo del número de onda, o del índice de refracción efectivo).

Para la comprobación de la forma de los modos se ha tenido que recurrir a la bibliografía, en la que se dispone de gran cantidad de datos debido a lo común de estas fibras hoy día, de la que se han realizado multitud de estudios, siendo el resultado obtenido nuevamente positivo. Se ha visto además que el orden de magnitud del error para ambos métodos es el mismo, con lo que en ese aspecto ambos son aptos para el posterior estudio de cristales fotónicos.

9.3.2. Simulaciones en Fibras Bragg

La simulación de fibras Bragg se ha realizado debido a las similitudes que presenta con los cristales fotónicos en cuanto a geometría y materiales. Con estas simulaciones se han comparado ambos métodos, no ya atendiendo a la exactitud de los resultados obtenidos, al no disponer de soluciones exactas del problema, sino atendiendo a otros aspectos tales como cantidad de memoria que requieren y tiempo de computación empleado, así como cantidad de resultados obtenidos. Así, se ha encontrado que el método de los Elementos Finitos, tal y como se ha implementado, es muy eficaz para el cálculo de los primeros autovalores. Para el cálculo de gran cantidad de autovalores (modos) el empleo de un método pseudoespectral [2] es más eficiente. De hecho, en la sección 5.3 se muestra una gráfica donde se han calculado más de mil modos para cada longitud de onda, algo que no se podría llevar a cabo en la práctica en el MEF debido al tiempo de computación que requeriría.

Hemos podido comprobar también que, si se permite una separación entre capas suficientemente grande, pueden propagarse modos por el “revestimiento” de la fibra, algo que puede provocar bastantes pérdidas.

9.3.3. Simulaciones en Fibras de Cristales Fotónicos

La simulación de cristales fotónicos ha desvelado gran cantidad de cualidades de estas fibras que las hacen muy adecuadas para la transmisión de información vía luz. El ya comentado comportamiento monomodo se da en todo el rango de longitudes de onda considerado (de 300 a 1600 nm) para fibras con un radio de los huecos adecuado, que se encuentra que no es muy pequeño respecto a la distancia entre los huecos. Un tamaño de huecos no excesivamente pequeño ofrece mayor facilidad a la hora de la fabricación

de estas fibras respecto a tamaños muy pequeños de los mismos, de ahí que se considere como una cualidad más. Además, se ha estudiado la ampliación del defecto central, siendo este caso el resultado que la fibra cambia su comportamiento a multimodo en la mayor parte de los casos (se necesita un tamaño de hueco excesivamente pequeño para que esto no ocurra).

Se ha visto también que la tendencia de los índices de refracción es muy similar a la que se encuentra para fibras ópticas y Bragg, siendo estos resultados acordes con la bibliografía disponible acerca de este tema.

Por otro lado, se ha estudiado los efectos que se producen en estas fibras al existir algún tipo de defecto en las mismas. Así, se ha visto que los cambios que sufren ante el defecto de suponer que el radio de algún hueco es mayor o menor del considerado (sección 7.2.1) son muy leves, manteniendo el comportamiento monomodo (si se trata de una fibra de este tipo), y variando de forma casi inapreciable el índice de refracción efectivo.

Para fibras en las que hay ausencia de algún hueco, el comportamiento cambia de forma más apreciable. El comportamiento deja de ser monomodo, ya que la onda electromagnética encuentra otra zona donde propagarse (siempre que este hueco no se encuentre junto al defecto de la fibra) igual a la zona central (núcleo o defecto de la fibra). El cambio en el índice de refracción efectivo sigue sin embargo siendo muy similar, ya que éste depende principalmente de la geometría y la longitud de onda.

En cuanto al tema de las fibras *tapered*, cabe destacar que hemos demostrado que existe un valor crítico para la relación entre el tamaño del “defecto” la longitud de onda de la señal portadora a partir del cual la señal deja de propagarse por éste para extenderse a la totalidad de la sección transversal la fibra.

9.4. Otras Líneas de Investigación

La línea de investigación seguida en el presente proyecto sobre modos de propagación en fibras de cristal fotónico tiene otra línea paralela que trata sobre la fabricación de estas fibras. Su fabricación es compleja debido al pequeño tamaño de huecos que se precisa conseguir (huecos del orden de $1\mu m$), por lo que se necesitan métodos numéricos muy precisos para calcular efectos de transmisión de calor en estas fibras para los distintos métodos de fabricación, transmisión que se produce de forma compleja debido a la geometría de las mismas. No obstante, ya se ha conseguido fabricar fibras de este tipo, aunque el precio de su fabricación y las pérdidas existentes en las fibras hacen que no tengan aún ninguna aplicación práctica.

En cuanto a la línea de investigación que ha seguido el presente proyecto, existen multitud de aspectos que se podrían seguir estudiando, tales como la aplicación de geometrías más complejas, con forma de huecos distintos, etc.

Apéndice A

Integrales en coordenadas baricéntricas

En este primer apéndice calcularemos todas las integrales polinómicas que se expusieron en el capítulo 3. En la sección 3.3 se explica cómo se obtienen estas integrales con el cambio de coordenadas necesario. De esta manera

$$\int 1 d\Delta = |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha = |J^{(t)}| \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \int x d\Delta &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (x_I + \alpha\xi_x + \beta\eta_x) d\beta \right] d\alpha \\ &= |J^{(t)}| \left\{ x_I \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\ &\quad + \xi_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\ &\quad \left. + \eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \right\} \\ &= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) x_I + \left(\frac{1}{6} \right) \xi_x + \left(\frac{1}{6} \right) \eta_x \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int y d\Delta &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (y_I + \alpha\xi_y + \beta\eta_y) d\beta \right] d\alpha \\ &= |J^{(t)}| \left\{ y_I \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\ &\quad + \xi_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\ &\quad \left. + \eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \right\} \\ &= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) y_I + \left(\frac{1}{6} \right) \xi_y + \left(\frac{1}{6} \right) \eta_y \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 d\triangle &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (x_I + \alpha\xi_x + \beta\eta_x)^2 d\beta \right] d\alpha \\
&= |J^{(t)}| \left\{ x_I^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\
&\quad + 2x_I\xi_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + 2x_I\eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \xi_x^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \eta_x^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad \left. + 2\xi_x\eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha\beta d\beta \right] d\alpha \right\} \\
&= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) x_I^2 + \left(\frac{1}{6}\right) 2x_I\xi_x + \left(\frac{1}{6}\right) 2x_I\eta_x \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{12}\right) \xi_x^2 + \left(\frac{1}{12}\right) \eta_x^2 + \left(\frac{1}{24}\right) 2\xi_x\eta_x \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int y^2 d\triangle &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (y_I + \alpha\xi_y + \beta\eta_y)^2 d\beta \right] d\alpha \\
&= |J^{(t)}| \left\{ y_I^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\
&\quad + 2y_I\xi_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + 2y_I\eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \xi_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \eta_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad \left. + 2\xi_y\eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha\beta d\beta \right] d\alpha \right\} \\
&= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) y_I^2 + \left(\frac{1}{6}\right) 2y_I\xi_y + \left(\frac{1}{6}\right) 2y_I\eta_y \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{12}\right) \xi_y^2 + \left(\frac{1}{12}\right) \eta_y^2 + \left(\frac{1}{24}\right) 2\xi_y\eta_y \right\}
\end{aligned}$$

$$\int xy d\triangle = |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (x_I + \alpha\xi_x + \beta\eta_x) (y_I + \alpha\xi_y + \beta\eta_y) d\beta \right] d\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= |J^{(t)}| \left\{ x_I y_I \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\
&\quad + (x_I \xi_y + y_I \xi_x) \eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + (x_I \eta_y + y_I \eta_x) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \xi_x \xi_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \eta_x \eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad \left. + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta d\beta \right] d\alpha \right\} \\
&= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) x_I y_I + \left(\frac{1}{6}\right) (x_I \xi_y + y_I \xi_x) + \left(\frac{1}{6}\right) (x_I \eta_y + y_I \eta_x) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{12}\right) \xi_x \xi_y + \left(\frac{1}{12}\right) \eta_x \eta_y + \left(\frac{1}{24}\right) (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^3 d\Delta &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (x_I + \alpha \xi_x + \beta \eta_x)^3 d\beta \right] d\alpha \\
&= |J^{(t)}| \left\{ x_I^3 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\
&\quad + 3x_I^2 \xi_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + 3x_I^2 \eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + 3x_I \xi_x^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + 3x_I \eta_x^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + 6x_I \xi_x \eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \xi_x^3 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^3 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad + \eta_x^3 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^3 d\beta \right] d\alpha \\
&\quad \left. + \xi_x^2 \eta_x \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 \beta d\beta \right] d\alpha \right. \\
&\quad \left. + \xi_x \eta_x^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta^2 d\beta \right] d\alpha \right\} \\
&= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) x_I^3 + \left(\frac{1}{6}\right) 3x_I^2 \xi_x + \left(\frac{1}{6}\right) 3x_I^2 \eta_x \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{12}\right) 3x_I \xi_x^2 + \left(\frac{1}{12}\right) 3x_I \eta_x^2 + \left(\frac{1}{24}\right) 6x_I \xi_x \eta_x \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{20} \right) \xi_x^3 + \left(\frac{1}{20} \right) \eta_x^3 + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_x^2 \eta_x + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_x \eta_x^2 \Big\}$$

$$\begin{aligned} \int y^3 d\triangle &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (y_I + \alpha \xi_y + \beta \eta_y)^3 d\beta \right] d\alpha \\ &= |J^{(t)}| \left\{ y_I^3 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\ &\quad + 3y_I^2 \xi_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + 3y_I^2 \eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + 3y_I \xi_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + 3y_I \eta_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + 6y_I \xi_y \eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + \xi_y^3 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^3 d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + \eta_y^3 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^3 d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + \xi_y^2 \eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 \beta d\beta \right] d\alpha \\ &\quad \left. + \xi_y \eta_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta^2 d\beta \right] d\alpha \right\} \\ &= |J^{(t)}| \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) y_I^3 + + \left(\frac{1}{6} \right) 3y_I^2 \xi_y + \left(\frac{1}{6} \right) 3y_I^2 \eta_y \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{12} \right) 3y_I \xi_y^2 + \left(\frac{1}{12} \right) 3y_I \eta_y^2 + \left(\frac{1}{24} \right) 6y_I \xi_y \eta_y \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_y^3 + \left(\frac{1}{20} \right) \eta_y^3 + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_y^2 \eta_y + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_y \eta_y^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 y d\triangle &= |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (x_I + \alpha \xi_x + \beta \eta_x)^2 (y_I + \alpha \xi_y + \beta \eta_y) d\beta \right] d\alpha \\ &= |J^{(t)}| \left\{ x_I^2 y_I \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\ &\quad + (2x_I y_I \xi_x + x_I^2 \xi_y) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\ &\quad + (2x_I y_I \eta_x + x_I^2 \eta_y) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\ &\quad \left. + (2x_I \xi_x \xi_y + y_I \xi_x^2) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2x_I \eta_x \eta_y + y_I \eta_x^2 \right) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\
& + \left(x_I \xi_x \eta_y + x_I \xi_y \eta_x + y_I \xi_x \eta_x \right) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta d\beta \right] d\alpha \\
& + \xi_x^2 \xi_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^3 d\beta \right] d\alpha \\
& + \eta_x^2 \eta_y \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^3 d\beta \right] d\alpha \\
& + \left(2\xi_x \eta_x \xi_y + \xi_x^2 \eta_y \right) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 \beta d\beta \right] d\alpha \\
& + \left(2\xi_x \eta_x \eta_y + \eta_x^2 \xi_y \right) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta^2 d\beta \right] d\alpha \quad \} \\
= |J^{(t)}| & \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) x_I^2 y_I + \left(\frac{1}{6} \right) (2x_I y_I \xi_x + x_I^2 \xi_y) \right. \\
& + \left(\frac{1}{6} \right) (2x_I y_I \eta_x + x_I^2 \eta_y) + \left(\frac{1}{12} \right) (2x_I \xi_x \xi_y + y_I \xi_x^2) \\
& + \left(\frac{1}{12} \right) 3y_I \eta_y^2 + \left(\frac{1}{12} \right) 6y_I \xi_y \eta_y \\
& + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_y^3 + \left(\frac{1}{20} \right) \eta_y^3 \\
& \left. + \left(\frac{1}{60} \right) \xi_y^2 \eta_y + \left(\frac{1}{60} \right) \xi_y \eta_y^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int xy^2 d\Delta & = |J^{(t)}| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} (x_I + \alpha \xi_x + \beta \eta_x) (y_I + \alpha \xi_y + \beta \eta_y)^2 d\beta \right] d\alpha \\
= |J^{(t)}| & \left\{ x_I y_I^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha \right. \\
& + (2x_I y_I \xi_y + y_I^2 \xi_x) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha \\
& + (2x_I y_I \eta_y + y_I^2 \eta_x) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha \\
& + (2y_I \xi_x \xi_y + x_I \xi_y^2) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha \\
& + (2y_I \eta_x \eta_y + x_I \eta_y^2) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha \\
& + (y_I \xi_x \eta_y + y_I \xi_y \eta_x + x_I \xi_y \eta_y) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta d\beta \right] d\alpha \\
& + \xi_x \xi_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^3 d\beta \right] d\alpha \\
& + \eta_x \eta_y^2 \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^3 d\beta \right] d\alpha \\
& \left. + (2\xi_y \eta_y \xi_x + \xi_y^2 \eta_x) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 \beta d\beta \right] d\alpha \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2\xi_y \eta_y \eta_x + \eta_y^2 \xi_x \right) \int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta^2 d\beta \right] d\alpha \quad \Big\} \\
= |J^{(t)}| & \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) x_I y_I^2 + \left(\frac{1}{6} \right) (2x_I y_I \xi_x + x_I^2 \xi_y) \right. \\
& + \left(\frac{1}{6} \right) (2x_I y_I \eta_y + y_I^2 \eta_x) + \left(\frac{1}{12} \right) (2y_I \xi_x \xi_y + x_I \xi_y^2) \\
& + \left(\frac{1}{12} \right) 3y_I \eta_y^2 + \left(\frac{1}{12} \right) 6y_I \xi_y \eta_y \\
& + \left(\frac{1}{20} \right) \xi_y^3 + \left(\frac{1}{20} \right) \eta_y^3 \\
& \left. + \left(\frac{1}{60} \right) \xi_y^2 \eta_y + \left(\frac{1}{60} \right) \xi_y \eta_y^2 \right\}
\end{aligned}$$

donde $d\Delta$ representa el elemento diferencial de área correspondiente al triángulo donde se calcula la integral y $|J^{(t)}|$ es el valor absoluto del determinante del Jacobiano de la transformación en el triángulo t y cuyo valor se corresponde con el doble del área del triángulo como se demostró en la sección 3.3. En las anteriores expresiones se han tenido en cuenta las siguientes relaciones:

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \alpha (1-\alpha) d\alpha = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2}{2} d\alpha = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \alpha^2 (1-\alpha) d\alpha = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^2 d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^3}{3} d\alpha = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \alpha \frac{(1-\alpha)^2}{2} d\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^3 d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \alpha^3 (1-\alpha) d\alpha = \frac{1}{20}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \beta^3 d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^4}{4} d\alpha = \frac{1}{20}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha^2 \beta d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \alpha^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2} d\alpha = \frac{1}{60}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\alpha} \alpha \beta^2 d\beta \right] d\alpha = \int_0^1 \alpha \frac{(1-\alpha)^3}{3} d\alpha = \frac{1}{60}$$

Apéndice B

PHOTONICS v1.0

En este apéndice se explicara cómo se resuelve en este proyecto el problema electro-magnético modelado por la ecuación de Helmholtz para una fibra cualquiera. Para ello mostraremos todas y cada una de las etapas necesarias. Los comandos de la PDEToolbox de MatLab más importantes utilizados para la resolución del problema aquí planteado se comentan usando la ayuda que este software contiene. La carpeta presente en el CD que se adjunta con este proyecto y que posee el mismo nombre que este apéndice contiene todos los códigos MatLab necesarios para la simulación de fibras por parte del lector que estuviese interesado.

■ DATOS DE LA FIBRA

En primer lugar, es necesario conocer los datos de la fibra que va a someterse a simulación así como los parámetros de ésta. Para ello existen dos posibilidades: ir introduciendo los parámetros conforme el programa los va solicitando o cargar los datos desde un fichero previamente construido.

■ OBTENCIÓN DE LA GEOMETRÍA

La obtención de la geometría del problema es una de las cuestiones que nos resuelve directamente la PDEToolbox de MatLab. Para ello se hace uso del comando `decsg` que se explica a continuación:

`DECSG` *Decompose constructive solid geometry into minimal regions.*

DL=DEC_SG(GD,SF,NS) decomposes the solid objects GD into the minimal regions DL. The solid objects are represented by the Geometry Description matrix, and the minimal regions are represented by the Decomposed Geometry matrix. DEC_SG returns the minimal regions that evaluate to true for the set formula SF. NS is a Name Space matrix that relates the columns in GD to variable names in SF.

DL=DEC_SG(GD) returns all minimal regions.

[DL,BT]=DEC_SG(GD) and [DL,BT]=DEC_SG(GD,SF,NS) additionally returns a Boolean table BT that relates the original solid objects to the minimal regions. A

column in BT corresponds to the column with the same index in GD. A row in BT corresponds to the column with the same index in DL.

[DL,BT,DL1,BT1,MSB1]=DECSEG(GD) and [DL,BT,DL1,BT1,MSB1]=DECSEG(GD) return a second set of minimal regions DL1 with a corresponding Boolean table BT1. This second set of minimal regions all have a connected outer boundary. These minimal regions can be plotted by using MATLAB patch objects. The calling sequences additionally returns a sequence MSB1 of drawing commands for each second minimal region.

GEOMETRY DESCRIPTION MATRIX

The Geometry Description matrix GD describes solid model that you draw in the PDETOOL GUI.

Each column in the Geometry Description matrix corresponds to an object in the solid geometry model. Four types of solid objects are supported. The object type is specified in row one:

1. For the circle solid, row one contains 1, the second and third row contain the center x- and y-coordinates respectively. Row four contains the radius of the circle.
2. For a polygon solid, row one contains 2, and the second row contains the number, N, of line segments in the boundary. The following N rows contain the x-coordinates of the starting points of the edges, and the following N rows contain the y-coordinates of the starting points of the edges.
3. For a rectangle solid, row one contains 3. The format is otherwise identical to the polygon format.
4. For an ellipse solid, row one contains 4, the second and third row contain the center x- and y-coordinates respectively. Row four and five contain the major and minor axes of the ellipse. The rotational angle of the ellipse is stored in row six.

DECOMPOSED GEOMETRY MATRIX

The Decomposed Geometry matrix DL contains a representation of the minimal regions that have been constructed by the DECSG algorithm. Each edge segment of the minimal regions correspond to a column in DL. In each such column rows two and three contain the starting and ending x-coordinate, and rows four and five the corresponding y-coordinate. Rows six and seven contain left and right minimal region numbers with respect to the direction induced by the start and end points (counter clockwise direction on circle and ellipse segments). There are three types of possible edge segments in a minimal regions:

1. For circle edge segments row one is 1. Rows eight and nine contain the coordinates of the center of the circle. Row 10 contains the radius.
2. For line edge segments row one is 2.
3. For ellipse edge segments row one is 4. Rows eight and nine contain the coordinates of the center of the ellipse. Rows 10 and 11 contain the major and minor axes of the ellipse respectively. The rotational angle of the ellipse is stored in row 12.

SET FORMULA

SF contains a set formula expressed with the set of variables listed in NS. The operators '+', '', and '-' correspond to the set operations union, intersection, and set difference respectively. The precedence of the operators '+' and '*' are the same. '-' has higher precedence. The precedence can be controlled with parentheses.*

NAME SPACE MATRIX - NS

The Name Space matrix NS relates the columns in GD to variable names in SF. Each column in NS contain a sequence of characters, padded with spaces. Each such character column assigns a name to the corresponding geometric object in gd. In this way we can refer to a specific object in gd in the set formula SF.

It is assumed that no circles are identical or have zero radius and that no lines have zero length. All polygons must have non-intersecting lines.

Nan is returned if the set formula SF cannot be evaluated.

■ MALLADO DE LA GEOMETRÍA

El siguiente paso consiste en malla la estructura. Para ello se hace uso de dos funciones de la PDEToolbox que son `initmesh` y `refinemesh`. Para esta operación ha sido muy importante la presencia de este paquete de MatLab pues en caso de no tenerlo hubiésemos tenido que crear un generador de malla, algo que no deja de tener bastante dificultad.

INITMESH *Build an initial PDE triangular mesh.*

[P,E,T]=INITMESH(G) returns a triangular mesh using the geometry specification function G. It uses a Delaunay triangulation algorithm. The mesh size is determined from the shape of the geometry.

G describes the geometry of the PDE problem. See PDEGEOM for details.

The outputs P, E, and T are the mesh data.

In the point matrix P, the first and second rows contain x- and y-coordinates of the points in the mesh.

In the edge matrix E, the first and second rows contain indices of the starting and ending point, the third and fourth rows contain the starting and ending parameter values, the fifth row contains the boundary segment number, and the sixth and seventh row contain the left- and right-hand side subdomain numbers.

In the triangle matrix T, the first three rows contain indices to the corner points, given in counter clockwise order, and the fourth row contains the subdomain number.

Valid property/value pairs include

The Hmax parameter controls the size of the triangles on the mesh. INITMESH creates a mesh where no triangle side exceeds Hmax.

Both the Box and Init parameters are related to the way the mesh algorithm works. By turning on Box you can get a good idea of how the mesh generation algorithm

<i>Property</i>	<i>Value/{Default}</i>	<i>Description</i>
<i>Hmax</i>	numeric {estimate}	Maximum edge size
<i>Hgrad</i>	numeric {1.3}	Triangle growth rate
<i>Box</i>	on—{off}	Preserve bounding box
<i>Init</i>	on—{off}	Boundary triangulation
<i>Jiggle</i>	off—{mean}—min	Call JIGGLEMESH
<i>JiggleIter</i>	numeric {10}	Maximum iterations

works within the bounding box. By turning on *Init* you can see the initial triangulation of the boundaries.

The *Jiggle* and *JiggleIter* parameters are used to control whether jiggling of the mesh should be attempted. See JIGGLEMESH for details.

REFINEMESH Refine a triangular mesh.

$[P1, E1, T1] = \text{REFINEMESH}(G, P, E, T)$ returns a refined version of the triangular mesh specified by the geometry *G*, point matrix *P*, edge matrix *E*, and triangle matrix *T*.

G describes the geometry of the PDE problem. *G* can either be a Decomposed Geometry Matrix or the name of Geometry M-file. See either DECSG or PDEGEOM for details.

The triangular mesh is given by the mesh data *P*, *E*, and *T*. Details can be found under INITMESH.

$[P1, E1, T1, U1] = \text{REFINEMESH}(G, P, E, T, U)$ refines the mesh and also extends the function *U* to the new mesh by linear interpolation. The number of rows in *U* should correspond to the number of columns in *P*, and *U1* will have as many rows as there are points in *P1*. Each column of *U* is interpolated separately.

An extra input argument is interpreted as a list of subdomains to refine, if it is a row vector, or a list of triangles to refine, if it is a column vector.

The default refinement method is regular refinement, where all of the specified triangles are divided into four triangles of the same shape. Longest edge refinement, where the longest edge of each specified triangle is bisected, can be demanded by giving 'longest' as a final parameter. Using 'regular' as the final parameter results in regular refinement. Some triangles outside of the specified set may also be refined, in order to preserve the triangulation and its quality.

■ DIFERENCIACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS TIPOS DE NODOS PRESENTES EN LA ESTRUCTURA

Para resolver el problema es necesario discriminar los distintos tipos de nodos que tenemos dentro de la estructura. Es por ello necesario localizar los nodos que

pertenecen al contorno entre los que nos encontramos los que tienen el valor del campo magnético nulo (nodos Dirichlet), los que cumplen la condición periódica (nodos Periódicos) así como el nodo origen, si es que simulamos una fibra truncada. Todos aquellos nodos que no pertenezcan al contorno constituyen los nodos interiores de la fibra. Los nodos donde el campo será incógnita son los nodos interiores, el nodo origen y los correspondientes a uno de los contornos periódicos. Con esta operación ya estamos introduciendo la condición de contorno Dirichlet homogénea puesto que descartaremos como nodos incógnitas aquellos que pertenezcan al contorno Dirichlet.

- **DEFINICIÓN EL ÍNDICE DE REFRACCIÓN n DE LA FIBRA**

El índice de refracción n de la fibra viene determinado por un valor complejo para cada uno de los nodos que componen la estructura. La parte real vendrá determinada por el dominio al que pertenezcan (aire, silicio, revestimiento, núcleo) mientras que la parte imaginaria sólo es distinta de cero para los nodos pertenecientes a la capa PML con una ley cuadrática como se comentó en la sección 3.4.1.

- **ENSAMBLAJE DE LAS ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DE LAS COMPONENTES TRANSVERSALES DEL CAMPO MAGNÉTICO**

- **CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS MODOS TRANSVERSALES**

Para hallar los autovalores y autovectores del problema generalizado que estamos resolviendo es necesario usar el comando `sptarn` de la PDEToolbox de MatLab.

`SPTARN` *Solve generalized sparse eigenvalue problem.*

`[XV,LMB,IRESULT]=SPTARN(A,B,LB,UB,SPD,TOLCONV,JMAX,MAXMUL)`

*Finds eigenvalues of pencil $(A-LMB*B)^*XV=0$ in interval LB $\leq LMB \leq UB$.*

Input data: A, B sparse matrices LB lower bound if -Inf all eigenvalues to the left of UB sought UB upper bound if +Inf all eigenvalues to the right of LB sought One of LB, UB must be finite. Narrower interval gives faster result. In complex case real parts of LMB are compared to LB and UB.

Output results:

*XV eigenvectors, ordered so that $NORM(A*XV-B*XV*DIAG(LMB))$ small LMB eigenvalues in interval, sorted IRESULT flag ABS(IRESULT) number of eigenvalues found IRESULT = 0 successful termination, all eigenvalues in interval found IRESULT > 0 not yet successful, there may be more eigenvalues. Try again with a smaller interval!*

Parameters that may be set, but have defaults: SPD true if pencil known to be symmetric pos definite default false

*TOLCONV expected relative accuracy default $100*eps$ machine precision*

*JMAX maximum number of basis vectors. You need $JMAX*N$ working space so a small value may be justified on a small computer, otherwise let it be the default*

value $JMAX=100$. Normally the algorithm stops earlier when enough eigenvalues have converged.

$MAXMUL$ number of Arnoldi runs tried. Must at least be as large as maximum multiplicity of any eigenvalue. If a small value of $JMAX$ is given, many Arnoldi runs are necessary. Default value is $MAXMUL=N$, which will be needed when all the eigenvalues of the unit matrix are sought!

Algorithm description: Uses Arnoldi with spectral transformation. The shift is chosen at UB , LB or at a random point in the interval (LB, UB) when both bounds are finite. Number of steps J in the Arnoldi run depends on how many eigenvalues there are in the interval, but stops at $J=MIN(JMAX,N)$. After a stop, restart to find more Schur vectors in orthogonal complement to all those already found. When no more eigenvalues are found in $LB \leq j \leq LB + MUL - 1$, algorithm stops. For small values of $JMAX$, several restarts may be needed before a certain eigenvalue has converged, algorithm works for $JMAX \geq num$ eigenvalues in interval + 1, but then many restarts are needed. For large values of $JMAX$, which is the preferred choice, $MUL+1$ runs are needed, where MUL is the maximum multiplicity of an eigenvalue in the interval. Works on nonsymmetric as well as symmetric pencils, but then accuracy is approximately $TOL^*($ Henrici departure from normality $)$. The parameter SPD is used only to choose between $SYMMMD$ and $COLMMD$ when factorizing, the former being marginally better for symmetric matrices close to the lower end of the spectrum. case of trouble: If convergence is too slow, try (in this order of priority) 1) a smaller interval LB, UB 2) a larger $JMAX$ 3) a larger $MAXMUL$. If factorization fails, try again with LB and UB finite. Then shift is chosen at random and hopefully not at an eigenvalue. If it fails again, check whether pencil is singular. If it goes on forever, there may be too many eigenvalues in the strip. Try with a small value $MAXMUL=2$ and see which eigenvalues you get! Those you get are some of the evs, but a negative iresult tells you that you have not gotten them all. If memory overflows, try smaller $JMAX$. Algorithm is designed for eigenvalues close to the real axis. If you want those close to the imaginary axis, try $A=i*A$! When SPD is true, shift is at LB so that advantage is taken of the faster factorization for symmetric positive definite matrices. No harm done but slower execution if LB above lowest eigenvalue.

- **ENSAMBLAJE DE LAS ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DE LA COMPONENTE LONGITUDINAL DEL CAMPO MAGNÉTICO**
- **CÁLCULO DE LA COMPONENTE LONGITUDINAL DEL CAMPO MAGNÉTICO**
- **SALVAR RESULTADOS EN ARCHIVO**

Existe la posibilidad de guardar las variables del workspace en archivos con extensión .mat para su posterior tratamiento. Esto se consigue con el comando **save**.

SAVE Save workspace variables to disk.

SAVE FILENAME saves all workspace variables to the binary "MAT-file" named *FILENAME.mat*. The data may be retrieved with *LOAD*. If *FILENAME* has no extension, *.mat* is assumed.

SAVE, by itself, creates the binary "MAT-file" named '*matlab.mat*'. It is an error if '*matlab.mat*' is not writable.

SAVE FILENAME X saves only *X*. *SAVE FILENAME X Y Z* saves *X*, *Y*, and *Z*. The wildcard '*' can be used to save only those variables that match a pattern.

ASCII Options: *SAVE ... -ASCII* uses 8-digit ASCII form instead of binary regardless of file extension. *SAVE ... -ASCII -DOUBLE* uses 16-digit ASCII form. *SAVE ... -ASCII -TABS* delimits with tabs. *SAVE ... -ASCII -DOUBLE -TABS* 16-digit, tab delimited.

MAT Options: *SAVE ... -MAT* saves in MAT format regardless of extension. *SAVE ... -V4* saves a MAT-file that MATLAB 4 can *LOAD*. *SAVE ... -APPEND* adds the variables to an existing file (MAT-file only).

When using the *-V4* option, variables that incompatible with MATLAB 4 are not saved to the MAT-file. For example, ND arrays, structs, cells, etc. cannot be saved to a MATLAB 4 MAT-file. Also, variables with names that are longer than 19 characters cannot be saved to a MATLAB 4 MAT-file.

■ VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS

Se dispone de una serie de algoritmos que permiten la visualización de la geometría del problema, la malla, el índice de refracción, la distribución del campo magnético en la estructura... Para ello se usan los siguientes comandos:

PDEGPlot Plot a PDE geometry specification.

PDEGPlot(G) plots the boundary segments specified by *G*. The internal boundaries are plotted.

H=PDEGPlot(G) returns handles to the plotted axes objects.

G describes the geometry of the PDE problem. *G* can either be a Decomposed Geometry Matrix or the name of Geometry M-file. See either *DECSEG* or *PDEGEOM* for details.

PDEMESH Plot a PDE triangular mesh.

PDEMESH(P,E,T) plots the mesh specified by *P*, *E*, and *T*.

PDEMESH(P,E,T,U) plots the solution column vector *U* using a mesh plot. If *U* is a column vector, node data is assumed. If *U* is a row vector, triangle data is assumed. This command plots the solution substantially faster than the *PDESURF* command.

H=PDEMESH(P,E,T) additionally returns handles to the plotted axes objects.

PDESURF Surface plot of PDE solution.

PDESURF(P,T,U) plots a 3-D surface of PDE node or triangle data. If *U* is a column vector, node data is assumed, and continuous style and interpolated shading are used. If *U* is a row vector, triangle data is assumed, and discontinuous style and flat shading are used.

H=PDESURF(P,T,U) additionally returns a handle to the patch objects.

PDECONT Contour plot of PDE solution.

PDECONT(P,T,U) draws 10 level curves of the function represented by the column vector *U*. *P* and *T* are point and triangles of a mesh. The function plotted is extended from the values at the points by linear interpolation.

PDECONT(P,T,U,N) plots using *N* levels.

PDECONT(P,T,U,V) plots using the levels specified by *V*.

H=PDECONT(P,T,U) returns handles to the line objects.

QUIVER Quiver plot.

QUIVER(X,Y,U,V) plots velocity vectors as arrows with components (*u,v*) at the points (*x,y*). The matrices *X,Y,U,V* must all be the same size and contain corresponding position and velocity components (*X* and *Y* can also be vectors to specify a uniform grid). *QUIVER* automatically scales the arrows to fit within the grid.

QUIVER(U,V) plots velocity vectors at equally spaced points in the *x-y* plane.

QUIVER(U,V,S) or *QUIVER(X,Y,U,V,S)* automatically scales the arrows to fit within the grid and then stretches them by *S*. Use *S=0* to plot the arrows without the automatic scaling.

QUIVER(...,LINESPEC) uses the plot linestyle specified for the velocity vectors. Any marker in *LINESPEC* is drawn at the base instead of an arrow on the tip. Use a marker of '.' to specify no marker at all. See *PLOT* for other possibilities.

QUIVER(...,'filled') fills any markers specified.

H = QUIVER(...) returns a vector of line handles.

Bibliografía

- [1] Paula Gould, "Photonics: practically there?," *Materials Today*, Vol. 5, No. 9, pp. 32–37 (2002).
- [2] Ángel L. Sánchez Berrocal, "Simulación escalar de modos normales en fibras de cristal fotónico," Universidad de Málaga, 2004.
- [3] Francisco R. Villatoro, "Propagación de ondas en fibra óptica no lineal," Curso de postgrado impartido en la Universidad de Pinar del Río, Cuba, 2003.
- [4] C.A. De Francisco, B.V. Borges, and M.A. Romero, "A semivectorial method for the modeling of photonic crystal fibers," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 38, No. 5, pp. 418–421 (2003).
- [5] J.M. Generowicz, B.P. Hiett, D.H. Beckett, S.J. Cox, M. Molinari, and G. Parker, "Modelling Photonic Crystals Using Finite Elements," Electronics and Computer Science Department Reports, University of Southampton, 2000.
- [6] B.P. Hiett, J.M. Generowicz, S.J. Cox, Duan H. Beckett and Ken S. Thomas, "Application of finite elements method to photonic crystal modelling," *IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology*, Vol. 149, No. 5, pp. 293–296 (2002).
- [7] "Partial Differential Equation Toolbox User's Guide," The MathWorks, Inc., 1996.
- [8] Ken S. Thomas, Simon J. Cox, Duan H. Beckett, Ben P. Hiett, Jasek Generowicz, and Geoffrey J. Daniell, "Eigenvalue spectrum estimation and photonic crystals," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 2150, pp. 578–586 (2001).
- [9] Owe Axelsson, "Iterative Solutions Methods," Cambridge University Press (1994).
- [10] J. P. Bérenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, No. 2, pp. 185–200 (1994).
- [11] J. P. Bérenger, "Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, Vol. 127, No. 2, pp. 363–379 (1996).

- [12] Peter G. Petropoulos, "Numerical dispersion and absorbing boundary conditions," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 13, No. 5, pp. 483–498 (2000).
- [13] Semyon V. Tsynkov and Eli Turkel, "A cartesian perfectly matched layer for the Helmholtz equation," in: *Loïc Tourrette and Lorance Halpern*, edited by Absorbing Boundaries and Layers, Domain Decomposition Methods. Applications to Large Scale Computations, Nova Science Publishers, Inc., New York, pp. 279–309 (2001).
- [14] Isaac Harari, Michael Slavutin, and Eli Turkel, "Analytical and numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation," *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 8, No. 1, pp. 121–137 (2000).
- [15] Eliane Bécache, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, and Guillaume Legendre, "Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation," Rapport de recherche de l'INRIA, No. RR-4690, 2003.
- [16] Marcus J. Grote, "Non-reflecting boundary conditions for electromagnetic scattering," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 13, No. 5, pp. 397–416 (2000).
- [17] F. L. Teixeira and W. C. Chew, "Complex space approach to perfectly matched layers: A review and some new developments," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 13, No. 5, pp. 441–455 (2000).
- [18] Li Zhao, "The generalized theory of perfectly matched layers (GT-PML) in curvilinear co-ordinates," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 13, No. 5, pp. 457–469 (2000).
- [19] John M. Senior, "Optical Fiber Communications: Principles and Practice," , Prentice Hall (1992).
- [20] Charles K. Kao, "Optical Fiber Systems: Technology, Desing and Applications," , McGraw-Hill (1982).
- [21] Juan A. Monsoriu, Miguel V. Andrés, Enrique Silvestre, Albert Ferrando, and Benito Gimeno, "Analysis of dielectric-loaded cavities using an orthonormal-basis method," *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, Vol. 50, No. 11, pp. 2545–2552 (2002).
- [22] Juan A. Monsoriu, Enrique Silvestre, Albert Ferrando, Pedro Andrés, and Juan J. Miret, "High-index-core Bragg fibers: dispersion properties," *Optics Express*, Vol. 11, No. 12, pp. 1400–1405 (2003).

- [23] Masanori Koshiba, "Full-Vector Analysis of Photonic Crystal Fibers Using the Finite Elements Method," *IEICE TRANSACTIONS on Electronics*, Vol. 85, No. 4, pp. 881–888 (2002).
- [24] Jesper Riishede, Niels Asger Mortensen, and Jesper Lægsgaard, "A "poor man's approach" to modelling of micro-structured optical fibers," *Journal of Optics A-Pure and Applied Optics*, Vol. 5, No. 5, pp. 534–538 (2003).
- [25] Albert Ferrando, Mario Zacarés, Pedro Fernández de Córdoba, Daniele Binosi, and Juan A. Monsoriu, "Spatial soliton formation in photonic crystal fibers," *Optics Express*, Vol. 11, No. 5, pp. 452–459 (2003).
- [26] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, M. V. Andrés, and P. Andrés, "Full-vector analysis of a realistic photonic crystal fiber," *Optics Letters*, Vol. 24, No. 5, pp. 276–278 (1999).
- [27] A. Ferrando, E. Silvestre, P. Andrés, J. J. Miret, and M. V. Andrés, "Designing the properties of dispersion-flattened photonic crystal fibers," *Optics Express*, Vol. 9, No. 13, pp. 687–697 (2001).
- [28] José M. Rico-García, M. López-Alonso, and Javier Alda, "Characterization of photonics crystal microcavities with manufacture imperfections," *Optics Express*, Vol. 13, No. 10, pp. 3802–3815 (2005).
- [29] Hong-Gyu Park, Jeong-Ki Hwang, Joon Huh, Han-Youl Ryu, Se-Heon Kim, and Yong-Hee Lee, "Characteristics of modified single-defect two dimensional photonic crystal lasers," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 38, No. 10, pp. 1353–1365 (2002).
- [30] Wei Jim, Zhi Wang, and Jian Ju, "Two-mode photonic crystal fibers," *Optics Express*, Vol. 13, No. 6, pp. 2082–2088 (2005).
- [31] Z. Wang, G.B. Ren, and S.Q. Lou, "Mode disorder in elliptical hole PCFs," *Optical Fiber Technology*, Vol. 10, No. 1, pp. 124–132 (2004).
- [32] Hong C. Nguyen, Boris T. Kuhlmeijer, Eric C. Mägi, Michael J. Steel, Cameron L. Smith, and Benjamin J. Eggleton, "Tapered photonic crystal fibres: Properties, characterisation, and applications," *Proceedings of SPIE*, Vol. 5840, pp. 29–43 (2005).
- [33] E. C. Mägi, P. Steinvurzel, and B. J. Eggleton, "Transverse characterization of tapered photonics crystal fibers," *Journal of Applied Physics*, Vol. 96, No. 7, pp. 3976–3982 (2004).
- [34] Yannick K. Lizé, Eric C. Mägi, Vahid G. Ta'eed, Jeremy A. Bolger, Paul Steinvurzel, and Benjamin J. Eggleton, "Microstructured optical fiber photonic wires with sub-wavelengths core diameter," *Optics Express*, Vol. 12, No. 14, pp. 3209–3217 (2004).

- [35] Y. Youk, D. Young Kim, and K. Wook Park, "Guiding properties of a tapered photonics crystal fiber compared with those of a tapered single-mode fiber," *Fiber and Integrated Optics*, Vol. 23, No. 6, pp. 439–446 (2004).
- [36] E. C. Mägi, P. Steinurzel, and B. J. Eggleton, "Tapered photonic crystal fibers," *Optics Express*, Vol. 12, No. 5, pp. 776–784 (2004).
- [37] Gilberto Brambilla, Vittoria Finazzi, and David J. Richardson, "Ultra-low-loss optical fiber nanotapers," *Optics Express*, Vol. 12, No. 10, pp. 2258–2263 (2004).