

Conjuntos y Sistemas Difusos

(Lógica Difusa y Aplicaciones)

2. Operaciones con Conjuntos Difusos



E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

Operaciones de Conjuntos

- **Operaciones:** $A(x), B(x)$ son conjuntos difusos en el universo X .
 - **Unión:** $(A \cup B)(x) = A(x) \dot{\cup} B(x) = \max \{A(x), B(x)\}$
 - **Intersección:** $(A \cap B)(x) = A(x) \dot{\cap} B(x) = \min \{A(x), B(x)\}$
 - **Negación** (complemento a uno): $\bar{A}(x) = \neg A(x) = 1 - A(x)$
- **Propiedades Básicas:**
 - **Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$
 - **Asociativa:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C;$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C;$
 - **Idempotencia:** $A \cup A = A; \quad A \cap A = A;$
 - **Distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
 - **Condiciones Frontera o Límite:** $A \cup \bar{A} = A; \quad A \cup X = X;$
 $A \cap \bar{A} = \bar{A}; \quad A \cap X = A;$
 - **Involución** (doble negación): $\neg(\neg A) = A;$
 - **Transitiva:** $A \dot{\subseteq} B \text{ y } B \dot{\subseteq} C, \text{ implica } A \dot{\subseteq} C;$
- **Propiedades Añadidas:** Se deducen de las anteriores.
 - $(A \cap B) \dot{\subseteq} A \dot{\subseteq} (A \cup B);$
 - Si $A \dot{\subseteq} B$, entonces $A = A \cap B$ y $B = A \cup B;$
 - $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B);$
 - $\text{Card}(A) + \text{Card}(\neg A) = \text{Card}(X);$

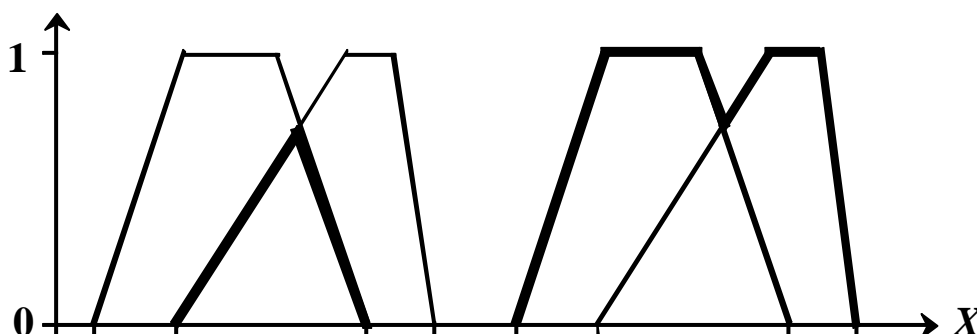
Normas y Conormas Triangulares

- Conceptos derivados de Menger (1942) y Schwizer y Sklar (1983), actualmente están muy desarrollados (Butnario et al., 1993).
- Establecen **modelos genéricos** para las operaciones de **unión y intersección**, las cuales deben cumplir ciertas propiedades básicas (conmutativa, asociativa, monotonicidad y condiciones frontera).
- **Definiciones:**
 - **Norma Triangular, t-norma:** Operación binaria $t: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:
 - **Conmutativa:** $x \ t \ y = y \ t \ x$
 - **Asociativa:** $x \ t \ (y \ t \ z) = (x \ t \ y) \ t \ z$
 - **Monotonicidad:** Si $x \leq y$, $y \leq z$ entonces $x \ t \ w \leq y \ t \ z$
 - **Condiciones Frontera:** $x \ t \ 0 = 0$, $x \ t \ 1 = x$
 - **Conorma Triangular, t-conorma o s-norma:** Op. bin. $s: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:
 - **Conmutativa:** $x \ s \ y = y \ s \ x$
 - **Asociativa:** $x \ s \ (y \ s \ z) = (x \ s \ y) \ s \ z$
 - **Monotonicidad:** Si $x \leq y$, $y \leq z$ entonces $x \ s \ w \leq y \ s \ z$
 - **Condiciones Frontera:** $x \ s \ 0 = x$, $x \ s \ 1 = 1$

3

t-norma/ s-norma del mínimo/ máximo

- **t-norma del mínimo:** La función $\min (\wedge)$ es una t-norma, que corresponde a la operación de **intersección** en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $\{0,1\}$. Por eso, esta función es la extensión natural de la intersección en conjuntos difusos.
- **t-conorma o s-norma del máximo:** La función $\max (\vee)$ es una s-norma, que corresponde a la operación de **unión** en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $\{0,1\}$. Por eso, esta función es la extensión natural de la unión en conjuntos difusos.
- **Ejemplos:** **Intersección** **Unión**



4

Ejemplos de Otras t-normas

- 1. **Producto:** $x \cdot y$;
- 2. **Producto Drástico:** $\begin{cases} x, & \text{si } y = 1; \\ y, & \text{si } x = 1; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$
- 3. **Producto Acotado:** $\max(0, (1+p)(x+y-1) - pxy), p \geq -1$, (usual. $p=0$);
- 4. **Producto de Hamacher:** $\frac{xy}{p + (1-p)(x+y-xy)}, p \geq 0$, (usual. $p=0$);
- 5. **Familia Yager:** $1 - \min(1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p})$, $p > 0$;
- 6. **Familia Dubois-Prade:** $xy / \max(x, y, p)$, $p \in [0,1]$;
- 7. **Familia Frank:** $\log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1} \right)$, $p > 0, p \neq 1$;
- 8. **Producto de Einstein:** $\frac{xy}{1 + (1-x) + (1-y)}$;
- 9. **Otras t-normas:** $\frac{1}{1 + \sqrt[p]{((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p}}$, $p > 0$; $\frac{1}{\sqrt[p]{1/x^p + 1/y^p - 1}}$;

5

Ejemplos de Otras s-normas

- 1. **Suma-Producto:** $x + y - xy$;
- 2. **Suma Drástica:** $\begin{cases} x, & \text{si } y = 0; \\ y, & \text{si } x = 0; \\ 1, & \text{en otro caso;} \end{cases}$
- 3. **Suma Acotada:** $\min(1, x + y + pxy)$, $p \geq 0$;
- 4. **Familia Sugeno:** $\min(1, x + y + p - xy)$, $p \geq 0$;
- 5. **Familia Yager:** $\min(1, \sqrt[p]{x^p + y^p})$, $p > 0$;
- 6. **Familia Dubois-Prade:** $1 - \frac{(1-x)(1-y)}{\max(1-x, 1-y, p)}$, $p \in [0,1]$;
- 7. **Familia Frank:** $\log_p \left(1 + \frac{(p^{1-x} - 1)(p^{1-y} - 1)}{p - 1} \right)$, $p > 0, p \neq 1$;
- 8. **Otras s-normas:** $\frac{x + y - xy - (1-p)xy}{1 - (1-p)xy}$, $p \geq 0$; $1 - \max(0, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p - 1})$, $p > 0$;
- 9. $\frac{1}{1 - \sqrt[p]{(x/(1-x))^p + (y/(1-y))^p}}$, $p > 0$; $1 - \frac{1}{\sqrt[p]{1/(1-x)^p + 1/(1-y)^p - 1}}$;

6

Características de las t-normas

- **Para cada t-norma existe una s-norma dual o conjugada** (yviceversa):
 • $x \mathbf{s} y = 1 - (1 - x) \mathbf{t} (1 - y)$ (usamos la negación original)
 • $x \mathbf{t} y = 1 - (1 - x) \mathbf{s} (1 - y)$
 • Esas son las **Leyes de De Morgan** de la teoría de conjuntos difusos, que en conjuntos crisp se aplican a la unión y a la intersección:

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$
- **t-normas y s-normas no pueden ordenarse de mayor a menor.**
 - Sin embargo, es fácil identificar la **mayor y la menor t-norma y s-norma**:
 - **Mayor t-norma** : **Función mínimo.**
 - **Menor t-norma** : **Producto drástico.**
 - **Mayor s-norma** : **Suma drástica.**
 - **Menor s-norma** : **Función máximo.**
- **t-norma Arquimediana**: Si es continua y $x \mathbf{t} x < x$, " $x \hat{\mathbf{I}} (0,1)$).
- **s-norma Arquimediana**: Si es continua y $x \mathbf{s} x > x$, " $x \hat{\mathbf{I}} (0,1)$).

7

Características de las t-normas

- En general, las **t-normas no satisfacen las siguientes leyes**, fundamentales en la lógica bivaluada:
 - **Contradicción** : $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$
 - **Exclusión del medio** : $A \cup \overline{A} \neq X$
 - Estas contradicciones se producen al operar con valores de pertenencia entre 0 y 1: La mayor desviación es para el valor **1/2**.
- **Excepciones**: Operaciones introducidas por J. Lukasiewicz (1920)
 - t-norma **Suma Acotada** con $p=0$: $(A \cap \overline{A})(x) = \max[0, A(x) + (1 - A(x)) - 1] = 0$
 - s-norma **Producto Acotado** con $p=0$: $(A \cup \overline{A})(x) = \min[1, A(x) + (1 - A(x))] = 1$
- **Propiedad de Idempotencia**: Sólo se cumple para el máximo y el mínimo: $x \mathbf{t} x = x$ y $x \mathbf{s} x = x$. Si se repite la t-norma (s-norma) sobre el mismo x los valores decrecen (crecen):

$$\begin{cases} x \mathbf{t} x \dots^{(n-1)} \dots x \mathbf{t} x \geq x \mathbf{t} x \dots^{(n)} \dots x \mathbf{t} x \\ x \mathbf{s} x \dots^{(n-1)} \dots x \mathbf{s} x \leq x \mathbf{s} x \dots^{(n)} \dots x \mathbf{s} x \end{cases}$$
- **Propiedad Distributiva**:
 - En general, no se cumple, excepto para el máximo y el mínimo.
- La **intersección y la unión** pueden ser identificadas con los **conectivos lógicos AND y OR** respectivamente.

8

Operaciones de AGREGACIÓN

- Son operaciones que combinan una colección de conjuntos difusos para producir un único conjunto difuso.
 - Una **Agregación** es una operación n -aria $A: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, que cumple:
 - **Condiciones Frontera:** $A(0, \dots, 0) = 0$ y $A(1, \dots, 1) = 1$
 - **Monotonicidad:** $A(x_1, \dots, x_n) \geq A(y_1, \dots, y_n)$ si $x_i \geq y_i, \forall i=1, \dots, n$
 - **t-normas / s-normas** (\cap / \cup) son operaciones de agregación.
- **Operadores Compensatorios** (*Compensatory Operators*):
 - A veces, una t-norma/s-norma no se comporta demasiado bien modelando las operaciones de \cap / \cup (conectivos **AND / OR**).
 - Zimmermann y Zysno (1980) propusieron el siguiente operador compensatorio Θ (zeta), donde el factor de compensación $\gamma \in [0,1]$ indica en qué punto está situado el operador entre AND y OR:

$$(A \Theta B)(x) = (A \cap B)(x)^{1-\gamma} (A \cup B)(x)^{\gamma}$$

- Cuanto mayor es γ más importancia tiene la \cup respecto a la \cap .

- Otro operador similar es:

$$(A \otimes B)(x) = (1 - \gamma)(A \cap B)(x) + \gamma(A \cup B)(x)$$

9

Operaciones de AGREGACIÓN

- **Sumas Simétricas** (*Symmetric Sums*):
 - Son funciones de n argumentos que además de cumplir la monotonicidad y las condiciones frontera, son continuas, conmutativas y auto-duales: $S_sum(x_1, \dots, x_n) = S_sum(1-x_1, \dots, 1-x_n)$
 - Dubois y Prade (1980) mostraron que cualquier suma simétrica puede ser representada de la siguiente forma, donde ρ (ρ) es cualquier función creciente con $\rho(0, \dots, 0)=0$:
- $$S_sum(x_1, \dots, x_n) = \left[1 + \frac{\rho(1-x_1, \dots, 1-x_n)}{\rho(x_1, \dots, x_n)} \right]^{-1};$$
- **Operadores OWA** (*Ordered Weighted Averaging*): (Yager, 1988)
 - Operadores ponderados con un vector de pesos w_i tal que: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$;
 - Ordenamos los valores $\{A(x_i)\}$: $A(x_1) \leq A(x_2) \leq \dots \leq A(x_n)$.
 - Entonces: $OWA(A, w) = \sum_{i=1}^n w_i A(x_i)$;
 - $OWA(A, (1, 0, \dots, 0)) = \min\{A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_n)\}$.
 - $OWA(A, (0, \dots, 0, 1)) = \max\{A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_n)\}$.
 - $OWA(A, (1/n, \dots, 1/n)) = (1/n) \sum_{i=1}^n A(x_i)$
 - Esta es la Media Aritmética: Equivalente a $A \oplus B$ con $\gamma = 0.5$.

10

Operaciones de AGREGACIÓN

- **Operación Media** (*Averaging Operation*): Funciones de n argumentos que cumple las propiedades: idempotencia, conmutativa y monotonicidad.
 - Según Dychkhoff y Pedrycz (1984) la **media generalizada** tiene la forma siguiente (p es el factor de compensación):

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^p}, \quad p \neq 0;$$

 - **Media Aritmética**, $p = 1$: $A(x_1, \dots, x_n) = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$;
 - **Media Geométrica**, $p \rightarrow 0$: $A(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$;
 - **Media Armónica**, $p = -1$: $\longrightarrow A(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/x_i}$;
 - **Mínimo**, $p \rightarrow -\infty$: $A(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$;
 - **Máximo**, $p \rightarrow +\infty$: $A(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$;
 - **Medias Casi-aritméticas** (*quasi-arithmetic means*): f es cualquier función estrictamente monótona (creciente o decreciente) y continua (Butnario y Klement, 1993): $A(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt[p]{[f^{-1}(x_1, \dots, x_n)]^p})$;
 - En general, una clase de operadores. **Media** son funciones $Av: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$
 - **Cond. Frontera**: $\min(x,y) \leq Av(x,y) \leq \max(x,y)$, $Av(0,0)=0$, $Av(1,1)=1$;
 - **Idempotencia**: $Av(x, x) = x$;
 - **Conmutativa**: $Av(x, y) = Av(y, x)$;
 - **Creciente y Continua**.

11

NEGACIONES

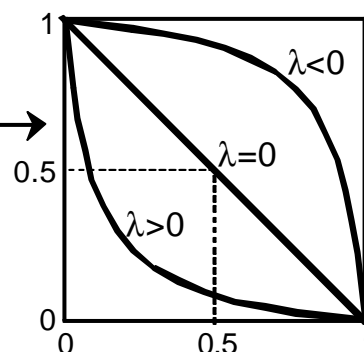
- **Complemento o Negación** de un conjunto difuso: $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$ cumpliendo las siguientes **condiciones**:
 - **Monotonicidad**: N es no creciente.
 - **Condiciones Frontera**: $N(0)=1$, $N(1)=0$;
- Pueden añadirse **otras propiedades**, si es necesario:
 - **Continuidad**: N es una función continua.
 - **Involución**: $N(N(x)) = x$, para $x \in [0,1]$;
- **Ejemplos**:
 - **No involutivas**: $N(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < a; \\ 0, & \text{si } x \geq a; \end{cases}$ con $a \in [0,1]$ (**Funcion umbral**)

$$N(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

- **Involutivas**: $N(x) = \frac{1-x}{1+lx}$, $l \in (-1, \infty)$;

$$N(x) = \sqrt[w]{1-x^w}, \quad w \in (0, \infty);$$

- Con $l = 0$ y $w = 1$, obtenemos la función **negación original**: $N(x) = 1 - x$;



12

NEGACIONES

- **Sistema Formal de Operaciones Lógicas** (t, s, N): Sistema formado por una t -norma, una s -norma y una negación N , donde la t -norma y la s -norma son duales respecto N :
 - $x \text{ s } y = N(N(x) \text{ t } N(y))$; o lo que es equivalente:
 - $x \text{ t } y = N(N(x) \text{ s } N(y))$;
- **Ejemplo 1:**
 - $x \text{ t } y = \min(x, y)$;
 - $x \text{ s } y = \max(x, y)$;
 - $N(x) = 1 - x$;
- **Ejemplo 2:**
 - $x \text{ t } y = \max\left(0, \frac{x + y - 1 + lxy}{1 + l}\right)$; (similar al producto acotado)
 - $x \text{ s } y = \min(1, x + y - 1 + lxy)$; (similar a la suma acotada)
 - $N(x) = \frac{1 - x}{1 + lx}$, $l > 1$; (similar a la negación original)
- **Otro Ejemplo de Negación:** $N(x) = \frac{1}{2}\{1 + \sin((2x + 1)p / 2)\}$;
 $N(0) = \frac{1}{2}\{1 + \underbrace{\sin(p / 2)}_1\} = 1$; $N(1) = \frac{1}{2}\{1 + \underbrace{\sin(3p / 2)}_{-1}\} = 0$;

13

COMPARACIÓN de Conj. Difusos

Distancia

- **Medidas de Distancia** (*Distance Measures*): Función binaria de distancia entre dos conj. difusos A y B , con el mismo universo X .
 - Esta función indica o mide la cercanía entre ambos conjuntos difusos.
 - En general, puede usarse la **Distancia de Minkowski**: $d(A, B) = \sqrt[p]{\int_x |A(x) - B(x)|^p dx}$, $p \geq 1$;
 - En **universos de discurso discretos**, la integral se sustituye por una sumatoria.
 - Casos particulares:
 - **Distancia de Hamming** ($p = 1$): $d(A, B) = \int_x |A(x) - B(x)| dx$;
 - **Distancia Euclídea** ($p = 2$): $d(A, B) = \sqrt{\int_x |A(x) - B(x)|^2 dx}$;
 - **Distancia Tchebyshev** ($p = \infty$): $d(A, B) = \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|$;
 - **Cuanto mayor es la similitud** entre ambos conjuntos difusos, **su distancia es menor** (expresa *distancia*, no *similitud*):
 - A veces se **normaliza** la función distancia en el intervalo $[0, 1]$, denotada por $d_n(A, B)$, expresando la **similitud** por: $1 - d_n(A, B)$.

14

COMPARACIÓN de Conj. Difusos

I. Igualdad

- **Índices de Igualdad** (*Equality Indexes*): Se basa en la expresión lógica de la igualdad: Dos conjuntos A y B son iguales si $A \hat{=} B$ y $B \hat{=} A$.
 - En conjs. Difusos la igualdad puede cumplirse con cierto grado.
 - Definimos:

$$(A \circ B)(x) = \frac{[A(x) \hat{=} B(x)] \hat{=} [B(x) \hat{=} A(x)] + [\bar{A}(x) \hat{=} \bar{B}(x)] \hat{=} [\bar{B}(x) \hat{=} \bar{A}(x)]}{2}$$
 - La conjunción (\wedge) se modela por la operación mínimo.
 - La inclusión es el operador $\hat{=}$ (ϕ), inducido por una **t-norma** continua, definido por:

$$A(x) \hat{=} B(x) = \sup_{c \in [0,1]} \{A(x) \mathbin{\text{t}} c\};$$
 - **Ejemplo:** Producto Acotado con $p=0$:

$$A(x) \hat{=} B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } A(x) < B(x) \\ B(x) - A(x) + 1, & \text{si } A(x) \geq B(x) \end{cases} \Rightarrow (A \circ B)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } A(x) < B(x) \\ \frac{1}{2}(B(x) - A(x) + 1), & \text{si } A(x) \geq B(x) \end{cases}$$
 - Para obtener un único valor ($\forall x \in X$) hay 3 métodos básicos:
 - Índice de Igualdad **Optimista** : $(A \circ B)_{\text{opt}} = \sup_{x \in X} (A \circ B)(x)$;
 - Índice de Igualdad **Pesimista** : $(A \circ B)_{\text{pes}} = \inf_{x \in X} (A \circ B)(x)$;
 - Índice de Igualdad **Medio** : $(A \circ B)_{\text{avg}} = (1/\text{Card}(X)) \int_X (A \circ B)(x) dx$;
 - Se cumple que: $(A \circ B)_{\text{pes}} \leq (A \circ B)_{\text{avg}} \leq (A \circ B)_{\text{opt}}$;

15

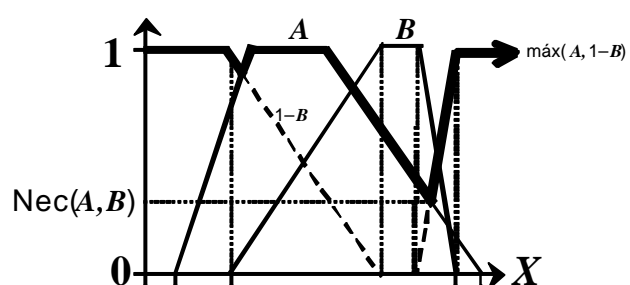
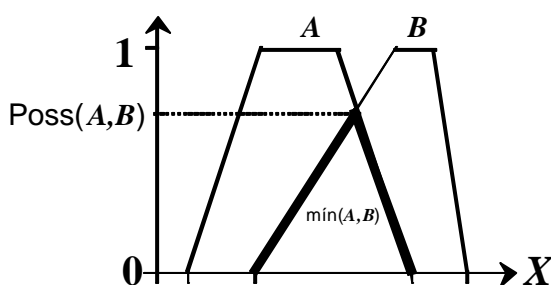
COMPARACIÓN de Conj. Difusos

Poss/Nec

- **Medidas de Posibilidad y Necesidad** (*Possibility/Necessity*):
 - Utiliza los conjuntos difusos como “**Distribuciones de Posibilidad**”:
 - $A(x)$ mide la “**posibilidad**” de que el dato buscado sea x (Zadeh, 1978).
 - **Posibilidad** de que el valor A sea igual al valor B :

$$\text{Poss}(A, B) = \sup_{x \in X} \{\min(A(x), B(x))\};$$
 - Mide en que medida A y B se superponen: $\text{Poss}(A, B) = \text{Poss}(B, A)$.
 - **Necesidad** de A respecto de B , o bien, **Necesidad** de que el valor B sea igual al valor A :

$$\text{Nec}(A, B) = \inf_{x \in X} \{\max(A(x), 1 - B(x))\};$$
 - Mide el grado con el que B está incluido en A : $\text{Nec}(A, B) \neq \text{Nec}(B, A)$.
 - Se cumple que: $\text{Nec}(A, B) + \text{Poss}(\neg A, B) = 1$.



16

COMPARACIÓN de Conj. Difusos

- Otras equivalencias: $\text{Poss}(A \cup B, C) = \max\{\text{Poss}(A, C), \text{Poss}(B, C)\};$
 $\text{Nec}(A \cap B, C) = \min\{\text{Nec}(A, C), \text{Nec}(B, C)\};$
- La **Generalización** de las **Medidas de Posibilidad y Necesidad**, usa normas triangulares en lugar de las funciones mín y máx.
- Posibilidad de un Conjunto Difuso** $A(x)$ (o de una distribución de posibilidad) en el universo X : $\boxed{P(A) = \text{Poss}(A, X)} = \sup_{x \in X} \{A(x)\}.$
 - P es una función que opera sobre los conjuntos difusos del universo X , $F(X)$, asociándoles un valor del intervalo unidad: $P: F(X) \rightarrow [0,1];$
 - $A(x)$ es un concepto evento difuso en X .
 - $P(A)$ mide el grado con el que A es posible.
 - $P(X)=1$; P Posibilidad de que ocurra un elemento del universo.
 - $P(\emptyset)=0$; P Posibilidad de que NO ocurra un elemento del universo.
 - $P(\bigcup_i A_i) = \sup_i P(A_i), i=1, \dots, n$; P Posibilidad de que ocurra al menos un evento de cierta lista de eventos: es la posibilidad del más posible.
 - $P(\bigcap_i A_i) \leq \inf_i P(A_i), i=1, \dots, n$; P Posibilidad de que ocurran varios eventos a la vez: es menor que la posib. del menos posible de ellos.
 - $P(A) + P(\neg A) \geq 1$;

17

COMPARACIÓN de Conj. Difusos

- Posibilidad de un Conjunto Difuso:** $P(A) = \text{Poss}(A, X).$
 - Mide si determinado evento es o no posible.
 - No mide la incertidumbre, ya que si $P(A)=1$ sabemos que el evento A es totalmente *posible*, pero si:
 - $P(\neg A)=1$, entonces la incertidumbre es indeterminada.
 - $P(\neg A)=0$, entonces la ocurrencia de A es cierta.
- Necesidad de un Conjunto Difuso :** $\boxed{N(A) = \text{Nec}(A, X)}$
 - $N(A) = \text{Nec}(A, X) = \inf_{x \in X} \{\max[A(x), 0]\} = \inf_{x \in X} \{A(x)\}.$
 - N es una función que opera sobre los conjuntos difusos del universo X , $F(X)$, asociándoles un valor del intervalo unidad: $N: F(X) \rightarrow [0,1];$
 - $N(A)$ mide la certeza del evento A : Necesidad de que A sea cierto.
 - $N(X)=1$; P Necesidad de que ocurra un elemento del universo.
 - $N(\emptyset)=0$; P Necesidad de que NO ocurra un elemento del universo.
 - $N(\bigcup_i A_i) \geq \sup_i N(A_i), i=1, \dots, n$; P Necesidad de que ocurra al menos un evento de cierta lista de eventos: es mayor que la mayor necesidad.
 - $N(\bigcap_i A_i) = \inf_i N(A_i), i=1, \dots, n$; P Necesidad de que ocurran varios eventos a la vez: es la necesidad del menos necesario.
 - $N(A) + N(\neg A) \leq 1$;

18

• Equivalencias entre Posibilidad y Necesidad:

- $N(A) = \inf_{x \in X} \{A(x)\} = 1 - \sup_{x \in X} \{1 - A(x)\} = 1 - P(\neg A)$: $N(A) = 1 - P(\neg A)$
- $P(A) = \sup_{x \in X} \{A(x)\} = 1 - \inf_{x \in X} \{1 - A(x)\} = 1 - N(\neg A)$: $P(A) = 1 - N(\neg A)$
- Estas equivalencias explican porqué la Necesidad complementa la información sobre la certeza de un evento A .
 - A mayor $N(A)$, menor posibilidad del evento contrario ($\neg A$).
 - A mayor $P(A)$, menor necesidad del evento contrario ($\neg A$).
 - $N(A) = 1 \Leftrightarrow \neg A$ es imposible, forzosamente: $P(\neg A) = 0$.
 - Si un evento es totalmente necesario, entonces el evento contrario es totalmente imposible.
 - $P(A) = 1 \Leftrightarrow \neg A$ no es necesario, en absoluto: $N(\neg A) = 0$.
 - Si un evento es totalmente posible, entonces el evento contrario no puede ser necesario en ninguna medida.
 - $N(A) = 1 \wedge P(A) = 1$ (a la inversa no se cumple).
 - Un evento totalmente necesario, debe ser totalmente posible.
- $A \dot{\sqsubset} B \Leftrightarrow N(A) \dot{\sqsubset} N(B)$; y $P(A) \dot{\sqsubset} P(B)$;

19

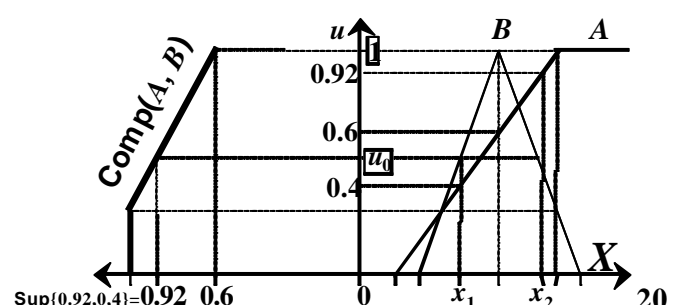
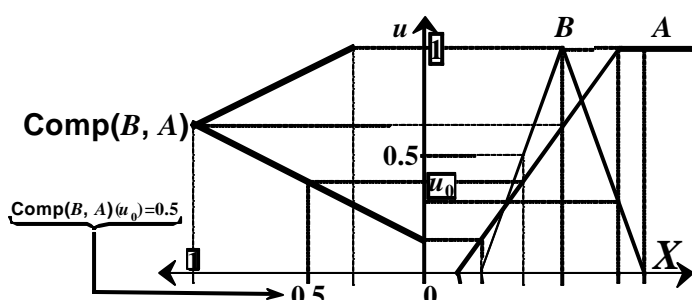
• Medidas de Compatibilidad: Mide en que medida cierto conjunto difuso es compatible con otro (definido en el mismo espacio).

- El resultado no es un único número, sino un conjunto difuso definido en el intervalo unidad, $[0,1]$ (Conjunto difuso de Compatibilidad).

– Compatibilidad de B con respecto a A :

$$\text{Comp}(B, A)(u) = \sup_{u=A(x)} \{B(x)\}, \quad u \in [0,1]$$

- Puede verse al conjunto B como un “**valor difuso**” y al conjunto A como un “**concepto difuso**”. Entonces $\text{Comp}(B, A)$ mide la **Compatibilidad con la que B es A** .
 - Ejemplo: B es el valor “aprox. 70 años” y A es el concepto “muy viejo”:



• Propiedades de la Medidas de Compatibilidad:

- Mide el grado con el que B puede cumplir el concepto A .
 - Ese grado será mayor cuanto más se aproxime el conjunto difuso $\text{Comp}(B, A)$ al valor *singleton* "1" (compatibilidad máxima).
- Suponiendo que B y A sean conjuntos difusos normalizados:
 - " A , $\text{Comp}(A, A)(u) = u$: Función de pertenencia lineal.
 - Si A no está normalizado, la función será la misma entre 0 y la altura del conjunto A : Si $u > \text{Altura}(A)$, $\text{Comp}(A, A)(u) = \text{indeterminado (0)}$.
 - Si B es un número x (conj. difuso tipo "singleton"), el resultado será también otro "singleton" en el valor $A(x)$:

$$\text{Comp}(B, A)(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u=A(x) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
 - Si B no está normalizado, el resultado tampoco lo estará, siendo su altura la misma que la del conjunto B .
 - $\text{Soporte}(A) \cap \text{Soporte}(B) = \emptyset$:

$$\text{Comp}(B, A)(u) = \text{Comp}(A, B)(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u=0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
 (compatibilidad mínima)
 - Si B no está normalizado, el resultado tampoco lo estará, siendo su altura la misma que la del conjunto B , para $u=0$.

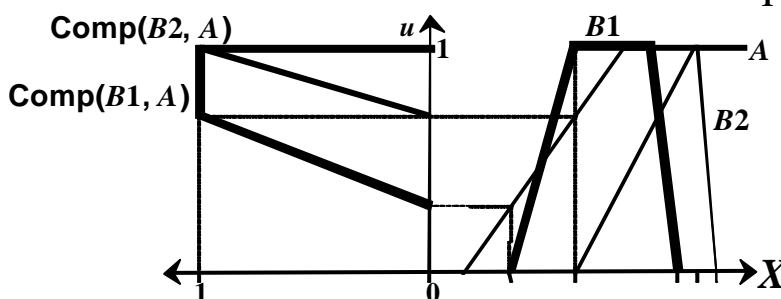
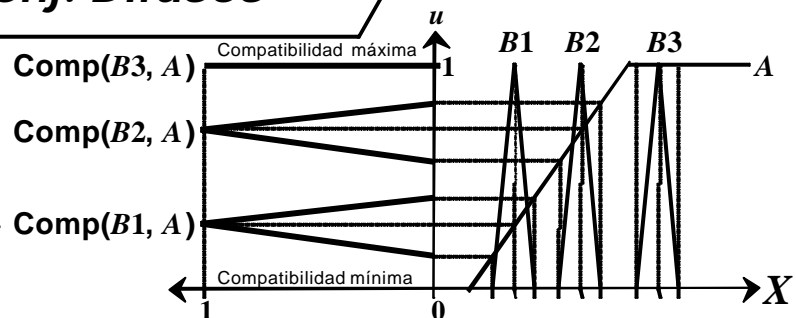
21

COMPARACIÓN de Conj. Difusos

Compatibilidad

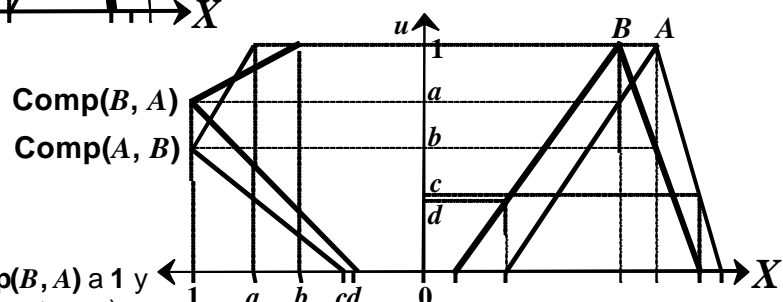
• Ejemplos Gráficos:

3 Conjuntos con igual forma situados en distintas posiciones comparados respecto A .



2 Conjuntos con igual altura que A en algún punto, pero que su núcleo está o no incluido en el núcleo de A .

2 Conjuntos triangulares comparados uno respecto del otro.



Conclusiones: B es más compatible con A cuanto **más** se acerque $\text{Comp}(B, A)$ a 1 y **más** se aleje del 0 (menos área tenga).

22

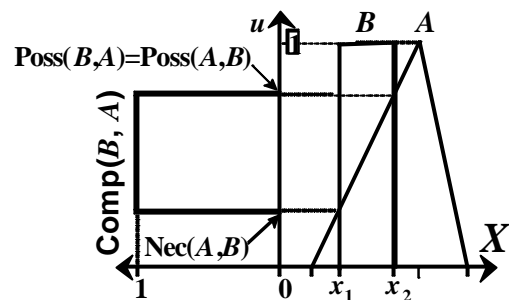
COMPARACIÓN de Conj. Difusos

• Más Propiedades de la Compatibilidad:

- La compatibilidad es asimétrica: $\text{Comp}(B, A) \neq \text{Comp}(A, B)$.
- Si $B \hat{=} B'$, entonces $\text{Comp}(B, A)(u) \hat{=} \text{Comp}(B', A)(u) = u$.
- $B(x) = \{1, "x \hat{=} X\} \vdash \text{Comp}(B, A)(u) = \{1, "u \hat{=} [0, 1]\}$
- $B(x) = \{0, "x \hat{=} X\} \vdash \text{Comp}(B, A)(u) = \{0, "u \hat{=} [0, 1]\}$
- $B \hat{=} A$ y están normalizados $\vdash \text{Comp}(B, A)(0) = 0$ y $\text{Comp}(B, A)(1) = 1$
 - Por supuesto, pueden existir más puntos con compatibilidad 0 y 1.
- $A \hat{=} B$ y están normalizados $\vdash \text{Comp}(B, A)(1) = 1$ y
 $\text{Comp}(B, A)(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- Las medidas de Posibilidad y Necesidad entre A y B están incluidas en el soporte de $\text{Comp}(B, A)$.

- Si B es un intervalo:

- $\text{Poss}(B, A) = \sup\{\text{Soporte}(\text{Comp}(B, A))\}$.
- $\text{Nec}(B, A) = \inf\{\text{Soporte}(\text{Comp}(B, A))\}$.



23

Ejemplo: Operaciones de Conjuntos

- Sean los siguientes Conjuntos Difusos en $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:
 - $A(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.5/3, 1/4, 0.4/5, 0.2/6\}$
 - $B(x) = \{0.1/3, 0.2/4, 0.5/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$
- Operaciones de Conjuntos:
 - Intersección $A \cap B$, según distintas t-normas:
 - Mínimo: $(A \cap B)(x) = \{0.1/3, 0.2/4, 0.4/5, 0.2/6\}$
 - Producto: $(A \cap B)(x) = \{0.05/3, 0.2/4, 0.2/5, 0.2/6\}$
 - Producto Drástico y Acotado usual: $(A \cap B)(x) = \{0.2/4, 0.2/6\}$
 - Unión $A \cup B$, según distintas t-conormas o s-normas:
 - Máximo: $(A \cup B)(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.5/3, 1/4, 0.5/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$
 - Suma-Producto:

$$(A \cup B)(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.55/3, 1/4, 0.7/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$$
 - Suma Drástica: $(A \cup B)(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.4/7, 0.2/8\}$
 - Suma Acotada ($p=0$):

$$(A \cup B)(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.6/3, 1/4, 0.9/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$$
 - Negaciones:
 - Original: $\neg A(x) = \{0.9/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.6/5, 0.8/6, 1/7, 1/8\}$
 - Función umbral con $a=0.5$: $\neg A(x) = \{1/1, 1/2, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8\}$

24

Ejemplo: Operaciones de Agregación

- Sean los siguientes Conjuntos Difusos en $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:
 - $A(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.5/3, 1/4, 0.4/5, 0.2/6\}$
 - $B(x) = \{0.1/3, 0.2/4, 0.5/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$
- Operaciones de Agregación:
 - **Operadores Compensatorios** (con la \cup e \cap del máximo y mínimo respectiv.):
 - Con $g = 0.5$:
 - Zimmermann y Zysno: $(AQB)(x) = \{0.22/3, 0.45/4, 0.45/5, 0.45/6\}$
 - Otro: $(A\ddot{A}B)(x) = \{0.05/1, 0.1/2, 0.3/3, 0.6/4, 0.45/5, 0.6/6, 0.2/7, 0.1/8\}$
 - Con $g = 0.7$ (da más valor a la unión que a la intersección):
 - Zimmermann y Zysno: $(AQB)(x) = \{0.31/3, 0.62/4, 0.47/5, 0.62/6\}$
 - $(A\ddot{A}B)(x) = \{0.07/1, 0.14/2, 0.38/3, 0.76/4, 0.47/5, 0.76/6, 0.28/7, 0.14/8\}$
 - **Operación Media:**
 - Aritmética: $\{0.05/1, 0.1/2, 0.3/3, 0.6/4, 0.45/5, 0.6/6, 0.2/7, 0.1/8\}$
 - Es igual a $A\ddot{A}B$ con $\gamma = 0.5$, y al operador OWA con pesos $(1/2, 1/2)$.
 - Geométrica: $\{0.22/3, 0.45/4, 0.45/5, 0.45/6\}$
 - Es igual a AQB con $\gamma = 0.5$.
 - Armónica: $\{0.17/3, 0.33/4, 0.44/5, 0.33/6\}$

25

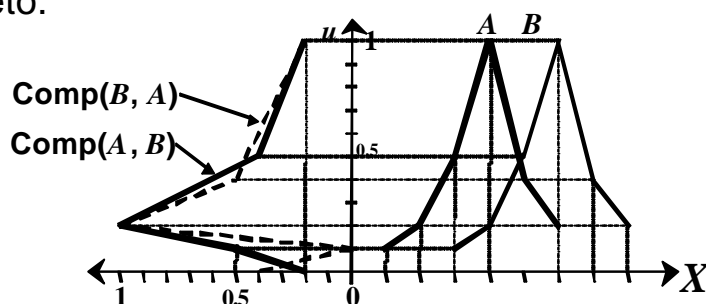
Ejemplo: Comparaciones

- Sean los siguientes Conjuntos Difusos en $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:
 - $A(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.5/3, 1/4, 0.4/5, 0.2/6\}$
 - $B(x) = \{0.1/3, 0.2/4, 0.5/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$
- Comparaciones entre A y B :
 - **Medidas de Distancia:**
 - **Distancia de Hamming:** En este caso, la mayor distancia de Hamming es 8.
Dist. $A-B$: $0.1+0.2+0.4+0.8+0.1+0.8+0.4+0.2 = 2.5$
 - **Distancia Euclídea:** En este caso, la mayor distancia Euclídea es $8^{0.5}=2.83$.
Dist. $A-B$: $(0.01+0.04+0.16+0.64+0.01+0.64+0.16+0.04)^{0.5} = 1.3$
 - **Distancia Tchebyshev:** La mayor distancia de Tchebyshev es siempre 1.
Dist. $A-B$: **0.8** (diferencia en el punto $x = 4$ ó $x = 6$).
 - **Medidas de Posibilidad y Necesidad:**
 - $Poss(A, B) = Poss(B, A) = 0.4$ (en el punto $x = 5$).
 - $Nec(A, B) = 0.2$ (en el punto $x = 6$)
 - $Nec(B, A) = 0.2$ (en los puntos $x = 4, x = 6$ ó $x = 8$).
 - $P(A) = P(B) = P(\neg A) = P(\neg B) = 1$;
 - $N(A) = N(B) = N(\neg A) = N(\neg B) = 0$;

26

Ejemplo: Comparaciones

- Sean los siguientes Conjuntos Difusos en $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:
 - $A(x) = \{0.1/1, 0.2/2, 0.5/3, 1/4, 0.4/5, 0.2/6\}$
 - $B(x) = \{0.1/3, 0.2/4, 0.5/5, 1/6, 0.4/7, 0.2/8\}$
- Comparaciones entre A y B :
 - **Índice de Igualdad:** Inducido por la t-norma del Producto Acotado con $p = 0$: $(A \circ B)(x) = \{0.9/1, 0.8/2, 0.6/3, 0.2/4, 0.9/5, 0.2/6, 0.6/7, 0.8/8\}$
 - $(A \circ B)_{\text{opt}} = 0.9$; $(A \circ B)_{\text{pes}} = 0.2$; $(A \circ B)_{\text{avg}} = 0.625$;
 - **Medidas de Compatibilidad:** $\text{Comp}(B,A)(x)$ y $\text{Comp}(A,B)(x)$.
 - Salen resultados algo extraños debido a que el Universo X es discreto.



27

Bibliografía

- D. Butnario, E.P. Klement: "Triangular Norm-Based Measures and Games with fuzzy Coalitions". Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- H. Dychkhoff, W. Pedrycz, "Generalized Means as a Model of Compensative Connectives". Fuzzy Sets and Systems 14, pp. 143-154, 1984.
- K. Menger: "Statistical Metric Spaces". Proc. of the National Academy of Sciences 37, pp. 535-537 (USA), 1942.
- B. Schwizer, A. Sklar: "Probabilistic Metric Spaces". Amsterdam: North Holland, 1983.
- R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operations in Multicriteria Decision making". IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18, pp. 183-190, 1988.
- L.A. Zadeh, "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning". Information Sciences 8, pp. 199-249 (part I), 8, pp. 301-357 (part II), 9, pp. 43-80 (part III), 1975.
- L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility". Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28, 1978.
- H. Zimmermann, P. Zysno, "Latent Connectives in human decision making". Fuzzy Sets and Systems 4, pp. 47-51, 1980.

28