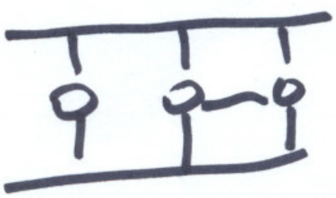
1ª lección 21-2-07.

1.1. Introducción histórica.

Leibnitz (1679) y Descartes.

Euler (río Pregel)



Gauss, Listing y Möbius.

La cinta de Möbius.

Empieza la topología, como aquella rama de la geometría que estudia las propiedades de las figuras, que son invariantes bajo la acción de transformaciones continuas y tienen inversa continua (homeomorfismos).

Desde el principio la Topología se divide en dos ramas

1º La Topología general o conjuntista

2ª La Topología simplicial (algebraica).

La topología conjuntista es obra de Heine, Borel, Weierstrass y Cantor o ~~conjuntista~~. Obra de los matemáticos de la 2ª mitad del siglo XIX.

2ª La Topología simplicial (ahora algebraica), que se inicia con Poincaré y Riemann ~~a finales de los años 90 del~~ XIX.

~~Riemann~~ a lo largo de la 2a mitad del siglo XIX, es la mayor creación de la Matemática del siglo XX. Su influencia en otras áreas de las ciencias exactas, tª de números, álgebra, geometría diferencial, y geometría algebraica ha sido enorme. La idea principal que la guía es, asignar estructuras algebraicas a los espacios topológicos y sus aplicaciones, de tal forma que el álgebra sea a la vez invariante bajo ciertas deformaciones y susceptible de

21-2-07 (:)

realizar cálculos, con ellas.

El origen de la creación de la Topología algebraica está en la Teoría de las Funciones de una variable compleja, obra de Cauchy.

Percepción de que muchas propiedades de las funciones analíticas, eran invariantes respecto deformaciones continuas de las integrales a lo largo de curvas que discurrían sobre el plano complejo.

Teorema de Cauchy
Tª de los residuos
Prolongación analítica

En la herencia que nos dejan Descartes-Leibnitz, cabe representar una función, utilizando unos ejes coordenados, abcisa y ordenada, dan

do valores a la variable inde-
pendiente, para obtener los valores correspon-
dientes para la variable dependiente o
función. Así resulta una curva que
representa a la función, en el plano x-y.

$$y = f(x).$$

Pero en el caso de función de una variable
compleja, nos encontramos con la complica-
ción, de que, las variables z, w que ha-
cen de la x, y del caso real, tienen la for-
ma

$$z = x + iy \qquad w = u + iv$$

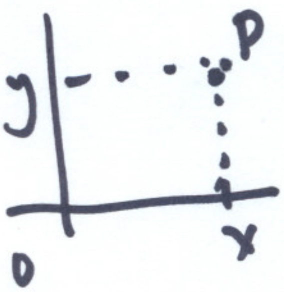
y si queremos hacer una gráfica, paro-
diando lo que hacíamos con $y = f(x)$,
necesitamos un plano de Gauss para z
y otro plano de Gauss para w, en total
dos planos y por ende estamos en cuatro
dimensiones. Esto es una complicación,
que resolvemos, sustituyendo la

abcisa y ordenada reales, rectas, por los planos complejos w y z.

Pero la cosa no queda ahí. Se nos presenta otra complicación, a saber: la existencia de funciones multiformes.

Una función real, asigna un valor a la variable y, para un valor de la variable x.

No se admite que, a un valor de x, correspondan dos o más valores de y. Sobre la ordenada x, no puede haber más de un punto P.



Sin embargo, en el momento que pasamos al caso complejo, nos encontramos con la existencia de funciones multiformes, cosa que choca frontalmente con lo que decimos en el caso de variables reales.

¿Cómo podemos arreglar la situación? Procediendo así:

Partimos de la función

$$w^2 = z \qquad (1)$$

con $w = u + iv$, $z = x + iy$

y en polares

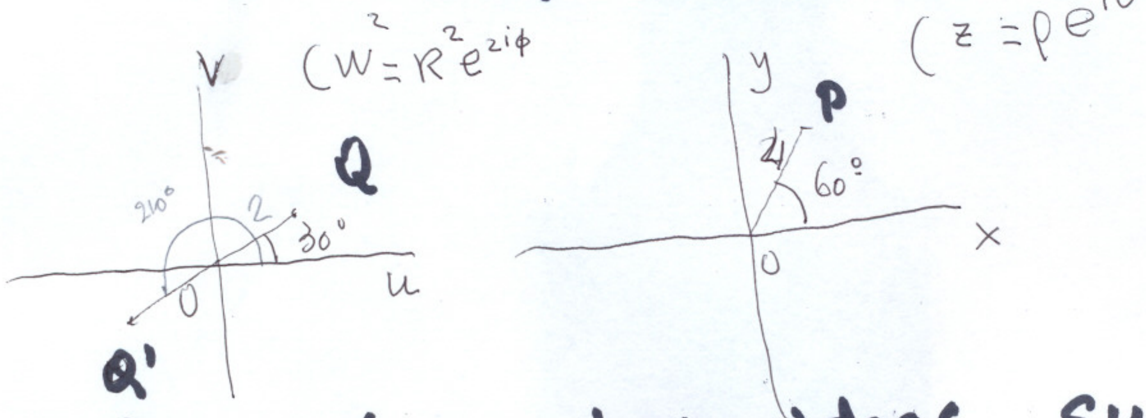
$$w = Re^{i\phi} \qquad z = \rho e^{i\theta}$$

con lo cual, la (1) será

$$R^2 e^{2i\phi} = \rho e^{i\theta}$$

de donde

$$R^2 = \rho \qquad 2i\phi = i\theta$$



Para fijar las ideas, supongamos que P es

$$P = z = 4(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad \theta = 60^\circ$$

y

$$Q = w = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

Cuando z, que inicialmente está en P, da un giro de $360°$, (sentido positivo), Q que estaba en $2e^{i30°}$ pasa a $Q' = 2(\cos 210 + i \operatorname{sen} 210) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2P$

De tal forma que al pasar P a P', y por lo tanto, estamos en el mismo punto, Q pasa a Q'. que son puntos diametralmente opuestos.

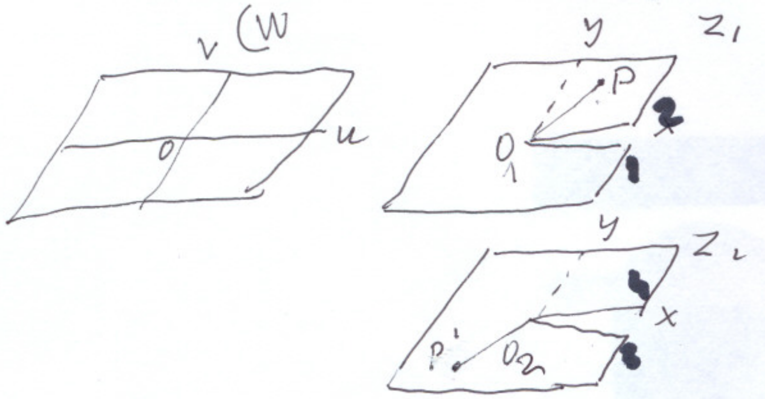
Aquí está la dificultad:

A un mismo punto $P = P' \rightarrow$ corresponden dos puntos distintos Q y Q'. Esto no es admisible. ¿Cómo salir del atolladero?

Veamos lo que hizo Riemann (Dissertation (1851))

Dado que para un mismo valor de z, resultan dos valores de w, tenemos que habilitar dos planos z_1, z_2

de tal forma, que z toma dos valores, uno en cada plano, resulta w, también toma dos valores, pero en el mismo plano w.



están los dos valores w_1 y w_2.

Ahora lo que rectas enlazan los planos z_1, z_2 unen los bordes del "corte" a lo largo del eje Ox, el 1 con el 4 y el 2 con el 3, de forma que al girar z alrededor del origen O pasa sin solución de continuidad de z_1 a z_2 y vuelve a z_1, cerrando el circuito.

El punto O_1 y el O_2 son el mismo, y el eje x sobre el eje x del uno y otro plano, también coincide. Con esto hemos hecho un "corte" a lo largo del [illegible] real pintura.

Poincaré empieza en 1898 una serie de 5 artículos, todos "Analysis Situs", en los que continuaría la obra empezada por Riemann y Betti, y consiguió asignar invariantes topológicos, distinguiendo entre curvas susceptibles de transformarse una en otra mediante homeomorfismo y aquellas que conforman un espacio y no son susceptibles de mayor deformación. De estas investigaciones nacen la homotopía y la homología, de las que tendremos ocasión de tratar en las lecturas siguientes.

1.2 Topología general.

La recta y el plano

Los números reales forman la

recta real $\mathbb{R}$, que es un conjunto completo y arquimediano.

(1.) Completo significa que cumple con el Axioma de la Menor cota superior. Ver S-L p 228

"Si A es un conjunto de números reales acotado superiormente, entonces A tiene una menor cota superior"

Ej. $A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}$

no es completo, ya que no existe un número racional m tal que

$$m = \operatorname{Sup}(A)$$

pues m no $\in \mathbb{Q}$, puesto que $m = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(2.) Arquimediano.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ no tiene cota superior, es decir, no hay un número real que supere a cualquier número positivo.

23-2-07.

1.3. Abiertos en $\mathbb{R}$. Interior:

A es conjunto números reales.

p punto de A, es interior de A $\Leftrightarrow$

interior $p \in S_p \subset A$ S_p es abierto.

donde S_p es intervalo $\subset A$.

A es abierto $\Leftrightarrow$ todos sus puntos son interiores.

Abierto

Ej: Un intervalo abierto $A=(a,b)$ es un conjunto abierto, porque tomando $S_p = A$ para todo $p \in A$ se cumple la condición

El intervalo abierto (a,b) se escribe

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

El conjunto $\emptyset$ es abierto, pues no hay ningún punto en $\emptyset$ que no

23- 2-07

Sea interior.

Propiedades ; en $\mathbb{R}$.

1ª La unión de infinito número de abiertos, es abierto.

2ª La intersección de finito número de abiertos, es abierto

Ej: Si $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ es decir la clase es

$$\left\{(-1,1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \dots \right\}$$

su intersección sería si hay infinitos abiertos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

, pero $\{0\}$ no es un abierto; es un punto.

" No puedo cumplir con

$0 \in S_p \subset \{0\}$ "

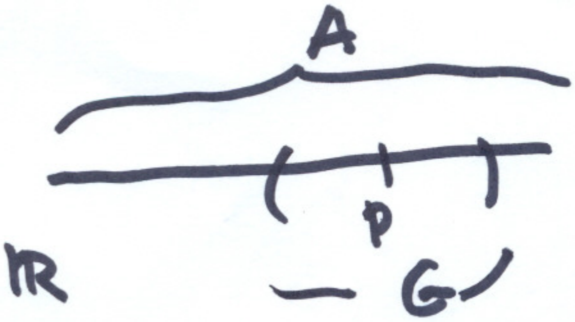
Acumulación

1.3 Puntos de acumulación.

A es subconjunto de $\mathbb{R}$. Un

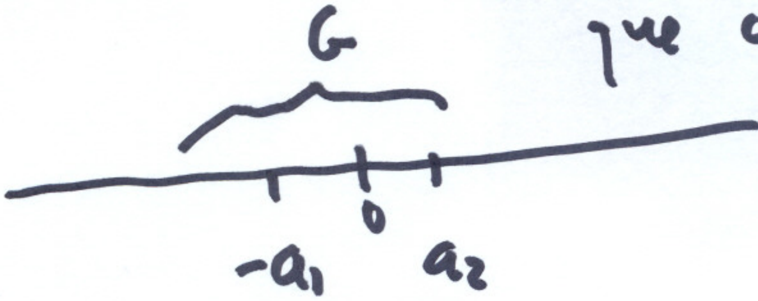
punto $P \in A$ es de acumulacion o punto límite de A $\leftrightarrow$ cualquier abierto G que contenga a P, contiene un punto de A diferente de P, es decir

$$G \text{ abierto}, P \in G \Rightarrow A \cap (G - \{p\}) \neq \phi$$



Los puntos de acumulación de A forman el conjunto derivado de A.

Ej: $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. El punto 0 es punto de acumulacion de A, pues cualquier abierto G con $0 \in G$, contiene abiertos $(-a_1, a_2)$, con $-a_1 < 0 < a_2$ que contienen puntos de A.



1.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Weiers. 23-2-07 (14

Si A es conjunto acotado e infinito de números reales, entonces tiene al menos un punto de acumulación

Demostración:

1º Se biseca el A, y luego se continúa la bisección para aquel subconjunto que siga con infinitos elementos. Si aparecen los dos, se elige siempre el de la izquierda.

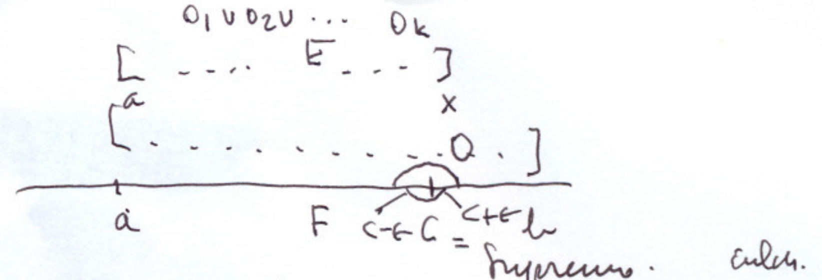
Conseguimos un encajado de intervalos cerrados, pues previamente hemos encerrado A en $[a_1, b_1]$. Por el Axioma de la mínima cota superior, llegamos a la conclusión de que toda sucesión de intervalos cerrados que forman un encaje, tienen al menos un punto en común.

Teorema de Heine-Borel, Royden "Real Analysis" p 42-43. 3-3-07

1) F es un conjunto cerrado y acotado de números reales.
2) Todo recubrimiento de infinitos abiertos de F tiene un subrecubrimiento finito.

Es decir, si $\mathcal{C}$ es una colección de abiertos tal que $F \subset \bigcup\{O : O \in \mathcal{C}\}$, hay una colección finita de abiertos $\{O_1, O_2 \dots O_n\}$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$



Demostración.

1º Supongamos que $F = [a,b]$ donde $-\infty < a < b < \infty$: Así demostramos un caso particular.

2º Sea E el conjunto de los $x \le b$, con la propiedad de que $[a,x]$ se puede recubrir con un número finito de conjuntos de $\mathcal{C}$.

3º E está acotado por b. y por lo tanto ha de tener una mínima cota superior (Supremo). $c \in [a,b]$

4º Como $c \in [a,b]$ hay un $O \in \mathcal{C}$ que contiene a c. (Todos los elementos de F, están recubiertos, por hipótesis, con abiertos.)

5º Por ser O abierto, hay $\epsilon > 0 : (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset O$.

6º Pero $c-\epsilon$ no es mínima cota sup de E, y entonces hay $x \in E$ con $x > c-\epsilon$

7º Dado que $x \in E$, hay una colección finita $\{O_1 \dots O_k\}$ de abiertos de $\mathcal{C}$ que recubre $[a,x]$, y la colección finita $\{O_1, \dots O_k, O\}$ recubrirá $[a, c+\epsilon]$

8º Así todo punto de $[c, c+\epsilon) \in E$ si fuera $\le b$.

9º Como ningún punto de $[c, c+\epsilon)$ excepto c puede pertenecer a E, habrá de ser $c = b$ y $b \in E$. Luego $[a,b]$ puede recubrirse por un número finito de conjuntos de $\mathcal{C}$, probando nuestro caso especial (supuesto que F es $[a,b]$). Con esto basta

Teorema de Heine-Borel.

Demostración en cuartilla aparte de 16-2-07

A es equiv a [c, d], cerrado y acotado intervalo.

Si $\mathfrak{F}$ es un covering infinitos intervalos abiertos ⇒ $\mathcal{G}$ contiene una subclase finita de abiertos que son covering a A. De ahí la idea de conjunto compacto.

1.4 Continuidad. Def $\epsilon-\delta$.

Continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

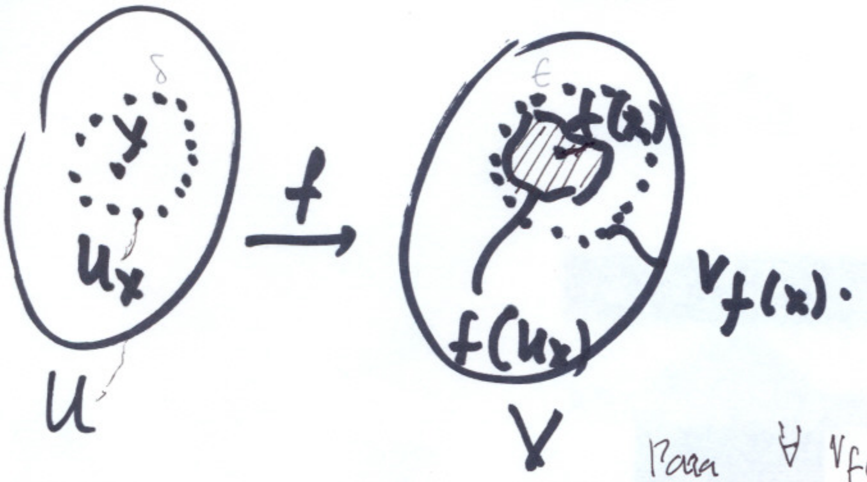
si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

LECCIÓN II

Continuidad (def. conjuntista).

La función $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $x \in \mathbb{R}$ si para todo abierto $V_{f(x)}$ que contenga a $f(x)$, hay un abierto U_x que contiene a x ; $f(U_x) \subset V_{f(x)}$

Lección 2ª



x	
f(x)	
ε	
δ	

$\forall \epsilon$	$V_{f(x)}$	$\left.\right\}$ $f(U_x) \subset V_{f(x)}$
$\exists \delta$	U_x	
$\lvert x-x_0 \rvert$	$V_{f(x)}$	
$\lvert f(x)-f(x_0) \rvert$	$f(U_x)$	

Para $\forall V_{f(x)}, \exists U_x : f(U_x) \subset V_{f(x)}$

$\epsilon \quad \delta : \Rightarrow : \lvert x-x_0\rvert<\delta \Rightarrow \lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\epsilon$

Para caracterizar completamente la continuidad en términos conjuntistas, vale la siguiente definición:

Def. Una función es continua $\leftrightarrow$ si la imágen inversa de cualquier abierto, es en Y, es un abierto en X.

Ej: Sea $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{x+5}{2} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

24-2-07 16 bis

Complemento.

Imagenes de una función.

$f: R \to R$. particularizada a

$$f: X \to Y$$

La imágen $f[A]$ de cualqui $A \subset X$

es

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

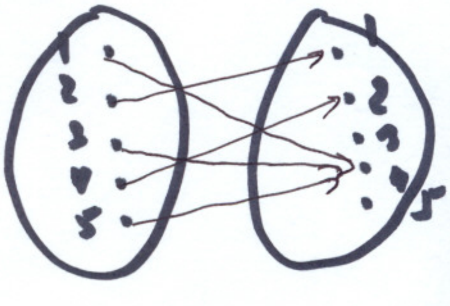
y la imágen inversa $f^{-1}[B]$ de cualqui

$B \subset Y$ es

$$f^{-1}[B] = [x : x \in X, f(x) \in B\}.$$

Ej. Obten $f[1\,3\,5]$, $f^{-1}[2\,3\,4]$

$f^{-1}[3,5]$



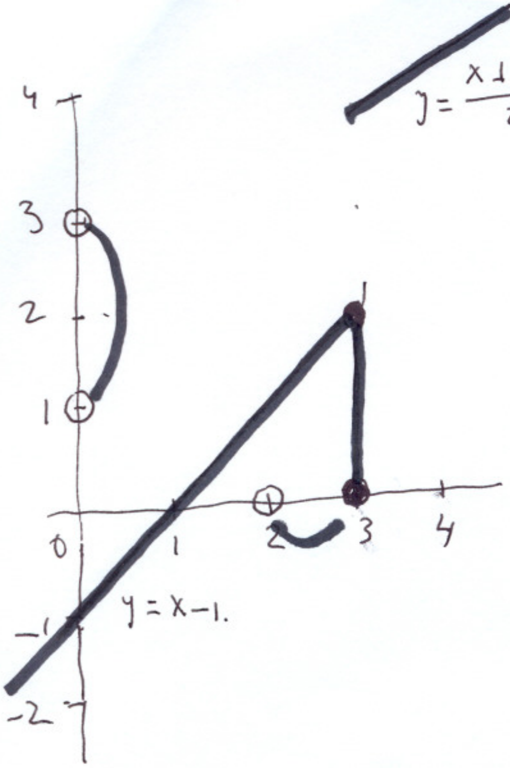
Solucion

$f[1,3,5] = \{4\}$

$f^{-1}[2\,3\,4] = \{4, 1, 3, 5\}$

$f^{-1}[3,5] = \phi.$

A distinguir de "función inversa"

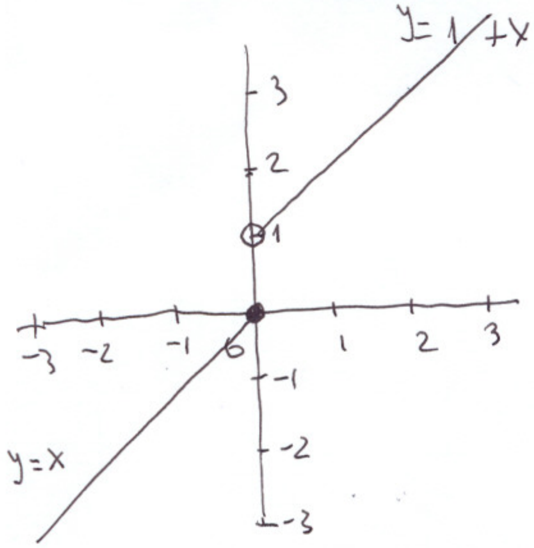


En la F_5, los puntos negros son alcanzados. El dominio de la función, es el eje real.- el punto $x=3$ se cuenta sólo una vez. La imágen inversa (no la función inversa) del abierto de Y, (1, 3), es el abierto-cerrado (2, 3], que no es, un abierto.

Cabe preguntar ¿ porqué se toman los abiertos empezando sobre y, pudiendo tomarlos sobre x en primer término?

Respuesta; porque damos un contra-ejemplo que nos muestra, que si tomamos un abierto en X, para obtener un abierto en Y, vemos que la cosa no funciona.

Sea la función



$$f(x)\begin{cases} y = x & \text{para } x \leq 0 \\ y = 1+x & \text{"} \quad x > 0 \end{cases}$$

La Fig nos dice que para todo abierto sobre X, hay un abierto sobre Y, y sin embargo, la función es discontinua en $x=0$. Basta aplicar la def : $\epsilon - \delta$, para convencerse.

(2.1) Homeomorfismos.

y (2.2) Ahora podemos definir, loque son los homeomorfiscos, que como tendremos ocasión de ver, son básicos para construir los elementos de la Topología, tanto general, como algebraica.

<u>Def de</u> homeomorfismo.

Previamente hay que decir los espacios topológicos.