23-2-07 p18 (bis

2ª Lección
Espacios Topológicos

2.1 Homeomorfismos

(2.1) Homeomorfismos.

y (2.2) Ahora podemos definir, loque son los homeomorfiscos, que como tendremos ocasión de ver, son básicos para construir los elementos de la Topología, tanto general, como algebraica.

Def de homeomorfismo.

Previamente hay que decir lo que son los espacios topológicos.

23-2-07 (19

X es un conjunto no vacío.

Una clase T de subconjuntos de X es una topología sobre X $\leftrightarrow$ se cumplen los

Axioma 1. X, ϕ pertenecen a T

" 2. La unión de cualquier número de conjuntos de T, pertenece a T

" 3. La intersección de cualesquiera dos conjuntos de T, pertenece a T.

Los miembros de T se llaman abiertos

y X junto con T, es decir el par (X, T) es un espacio topológico.

Ej: Dado $X = \{a, b, c, d, e\}$, formamos

Si $T_1 = \{X, \phi\ \{a\}\ \{c, d\}\ \{a, c, d\}\ \{b, c, d, e\}\}$

No $T_2 = \{X, \phi, \{a\}\ \{c, d\}\ \{a, c, d\}\ \{b, c, d\}\}$

No. $T_3 = \{X, \phi, \{a\}\ \{c, d\}\ \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

y vemos que:

T_1 es una topología, ya que cumple con los tres axiomas

T_2 no es topología, pues la unión

$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

no está en T_2.

T_3 tampoco es topología, pues

$\{a c d\} \cap \{a b d e\} = \{a d\}$ no está en T_3.

Topología discreta es la que contiene todos los subconjuntos en X

Topología indiscreta es la formada por

$\{X, \phi\}$

Relaciones de equivalencia

2.3. Invariantes Topológicos.

Una relación de equivalencia es una relación que cumple los siguientes requisitos.

1) Dado un conjunto X, una relación define un subconjunto de X. Por ej. la relación $>$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in >$, entonces $a > b$.

Las relaciones de equivalencia han de ser.

Reflexiva: $a \sim a$ 24-2-07 [2]

Simétrica: si $a \sim b \to b \sim a$

transitiva: si $a \sim b \wedge b \sim c \to a \sim c$.

Por la relación de equivalencia, obtenemos una partición de X en subconjuntos disjuntos, llamados

clases de equivalencia

Una clase [a] se compone de los elementos $x \in X$: $x \sim a$,

$$[a] \equiv \{x \in X : x \sim a\}.$$

El conjunto de todas las clases se llama espacio cociente.

Ej. Si un entero se divide por 2, el resto es par o ~~impar~~ si dos enteros dan el mismo resto al dividirlos por 2, escribimos $a \sim b$. Este es un ej. de clases de equivalencia.

Los representativos de las dos clases son [0] y [1] y el espacio cociente de Z se pone

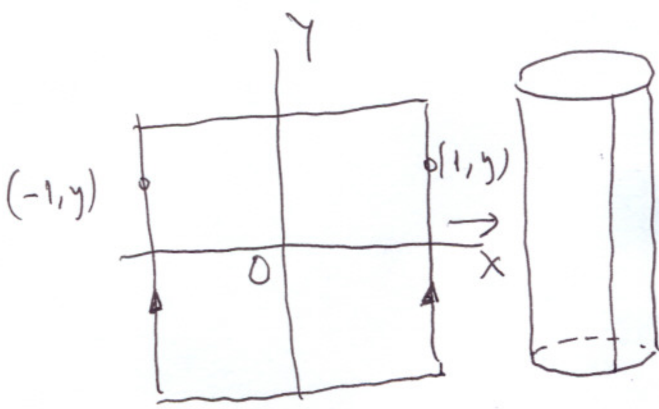
$$Z/\sim \text{ isomorfo a } Z_2$$

siendo Z_2 un grupo cíclico de orden 2.

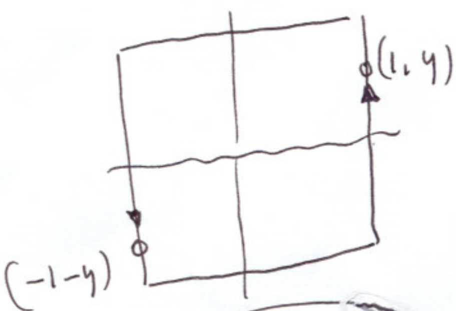
24-2-07. C22

Ej. Sea X un cuadrado

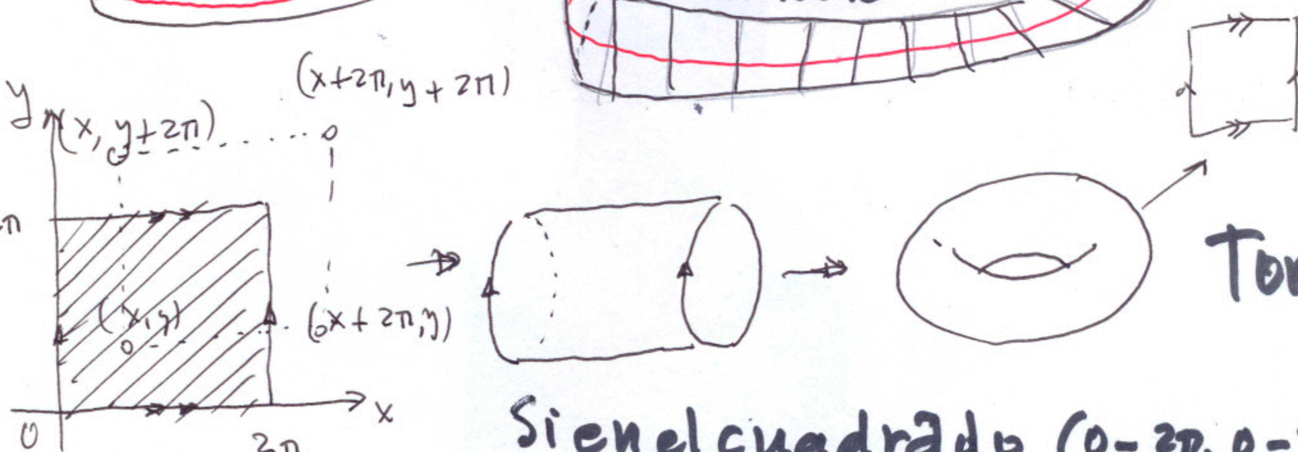
$\{x, y\} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1$



Si identificamos los puntos $(-1, y) \sim (1, y)$ resulta un cilindro



Si en el mismo cuadrado, identificamos los puntos $(-1-y) \sim (1, y)$, resulta una cinta de Möbius. No es cerrada, pues tiene un borde.

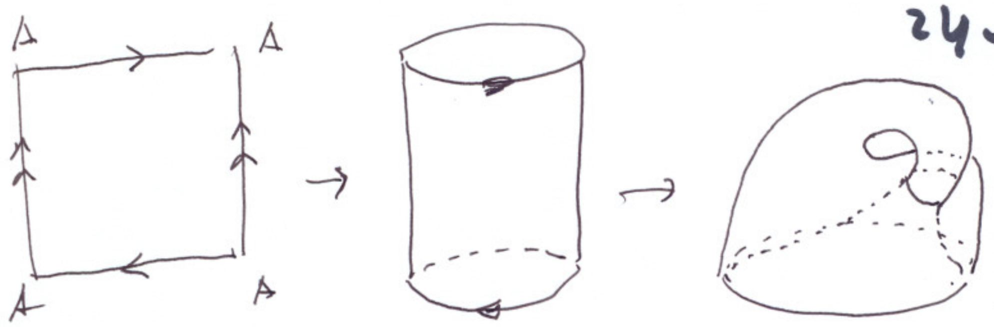


Toro.

Si en el cuadrado $(0-2\pi, 0-2\pi)$ identificamos por equivalencia $\sim$ dada por

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \begin{cases} x_2 = x_1 + 2\pi n \\ y_2 = y_1 + 2\pi m. \end{cases}$$

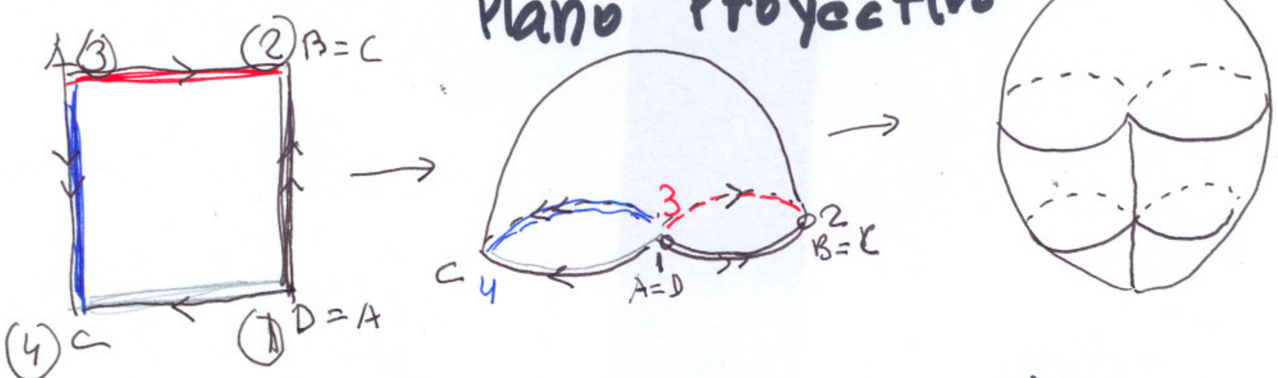
$m, n \in \mathbb{Z}$, resulta el Toro T^2



botella de Klein.

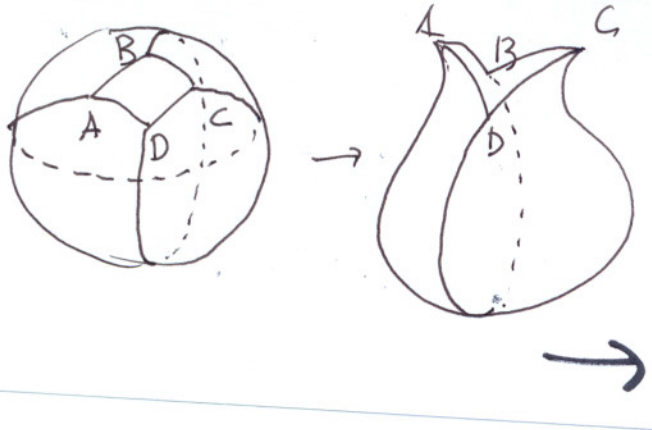
Si identificamos los lados del cuadra-do (o rectángulo, da igual) como indica la fig. resulta la botella de Klein (Kleinsche Flächen.) Flaschen o "toro no orientable". Es unilátera, como la cinta de Möbius, que también es no orientable.

Plano Proyectivo

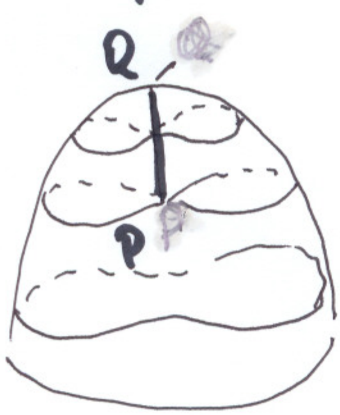


Esta Fig es el plano proyectivo

La cofia cruzada, es superficie cerrada y unilátera. A partir de la esfera, como se indica en las fig. adjuntas. Unilátera y cerrada.

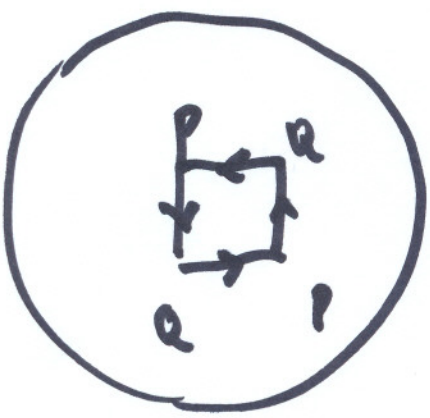


La cofia cruzada (Kreuzhaube, p 397 de Behnke... kunle;) ya la hemos referido, con el nombre de "Möbiusband". La nueva representación en R^3, está en la Fg adjunta



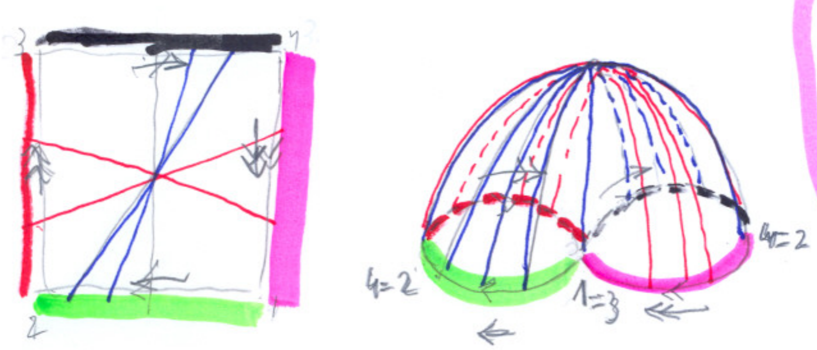
Fg 1

Cortando por PQ resulta de la la Fg 1, la Fg 2. que es un circulo con un agujero cuadrado, cuyos lados han de unirse de acuerdo a las flechas.



Fg

El toro (Ringfläche) y la (Kleinsche Schlauch) botella de Klein se diferencian en que una es bilátera, la otra unilátera.

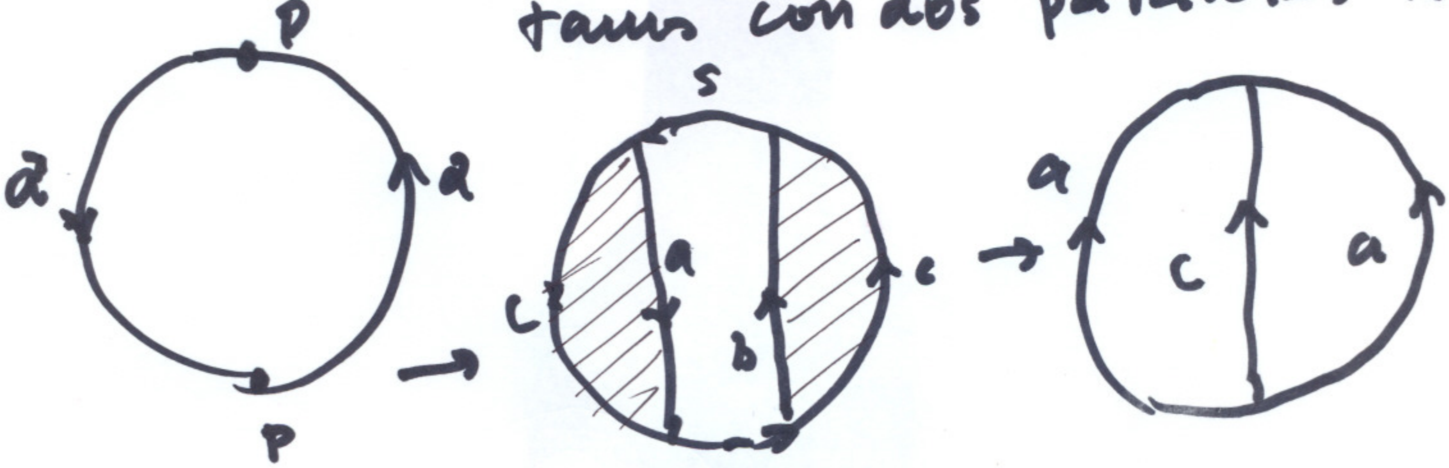


El plano proyectivo, representado concretamente. Nakahara, 41, lo representa mal 11-3-07.

A insertar en p23.

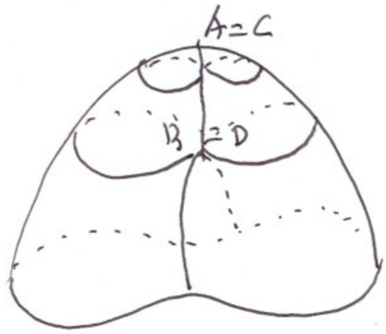
Otra representación, en R^3, del plano proyectivo es la que sigue. BEHNKE-BACHMANN-FLADT-KUNLE p 289.

Partimos del plano projectivo aa y cortamos con dos paralelas ab



y resulta una cinta de Möbius, mientras que los segmentos glisados se unen para dar un círculo. Así, un círculo cerrado con Möbius = PR^2.

24-2-07 (24



Se toma la mitad de la esfera inicial.

Cofia cruzada.
kreuzhaube.

2.3 Invariantes topológicos (Nakahara, p 54).

¿Como hemos de reconocer las equivalencias que producen los homeomorfismos?

Mediante Invariantes topológicos, y estos son aquellas cantidades que se conservan bajo transformaciones homeomorfas. Los invariantes, pueden ser números, como ¿cuantas componentes conexas tiene el espacio?, una estructura algebraica tal que un grupo, o algo como conexión, compacidad, o ser espacio de Hausdorff.

Teorema (sin demostración)

Si dos espacios topológicos tienen invariantes topológicos diferentes, no pueden ser homeomorfos.

Ej. 1. Un intervalo cerrado $[-1, 1]$ no es

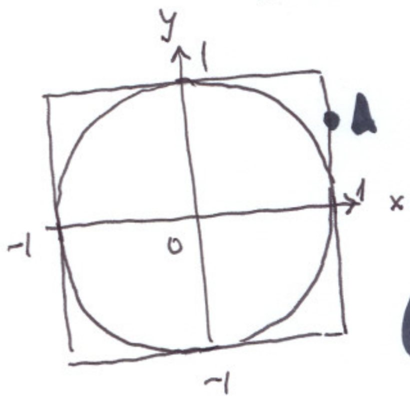
26-7-07 C5

homeomorfa a uno intervalo abierto, ya que,

[-1, 1] es compacto y (-1, 1) no lo es.

Ej. 2. Una circunferencia no es homeomorfa a $\mathbb{R}$, ya que, S^1 es compacta en $\mathbb{R}^2$, mientras que $\mathbb{R}$ no lo es.

Ej. 3. Una circunferencia $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ es homeomorfa al cuadrado $I^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|=1, y \leq 1), (x \leq 1, |y|=1)\}$.



Un homeomorfismo $f: I^2 \to S^1$ viene dado por

$$(1) \quad f(x,y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

y como r no es 0, la (1) se puede invertir. Comprobación.

Sea $A = (1, 0'8) \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+0'8^2}}, \frac{0'8}{\sqrt{1^2+0'8^2}}\right) =$

$= (0'79, 0'62)$, y $0'79^2 + 0'62^2 = 1$ c.q.d.

Homotopía (p 57 Nakahara).

Una clase de equivalencia algo más burda que los homeomorfismos, pero muy útil, es.

"el tipo de homotopía"

Para esto, relajamos las exigencias del homeomorfismo, de forma que solo requerimos la continuidad de la función f, y prescindimos de la función inversa.

Otro invariante topológico es la característica de Euler, que para los poliedros ordinarios, nos dice que

$$\chi = C + V - A = 2$$

C = caras

V = vértices

A = aristas

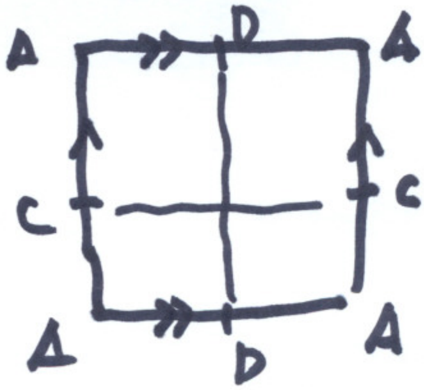
En general

$\chi(X)$ = nº vértices en K − nº aristas en K + nº caras en K

que nos forzosamente $\chi(X) = 2$.

K es un poliedro homeomorfo a X.

Ej. 4. Poliedro homeomorfo a un toro



C = 16

V = 16

A = 32

$\chi(X) = 0$

Suma conexa. (Nakahara p 58).

Para dos superficies la suma conexa

$$X \# Y$$

es la superficie que resulta al quitar un pequeño disco a X e Y para después conectar los agujeros resultantes, mediante un cilindro.

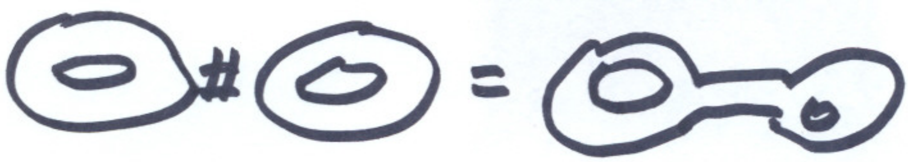
Ej. 1. Si X es una superficie cualquiera, entonces

$$S^2 \# X = X .$$

La # nos permite crear superficies.

ya que el cilindro que conecta S^2 con X, puede junto con S^2, rellenar el agujero abierto en S^2 y nos quedará X.

Ej 2. La suma conexa de dos toros



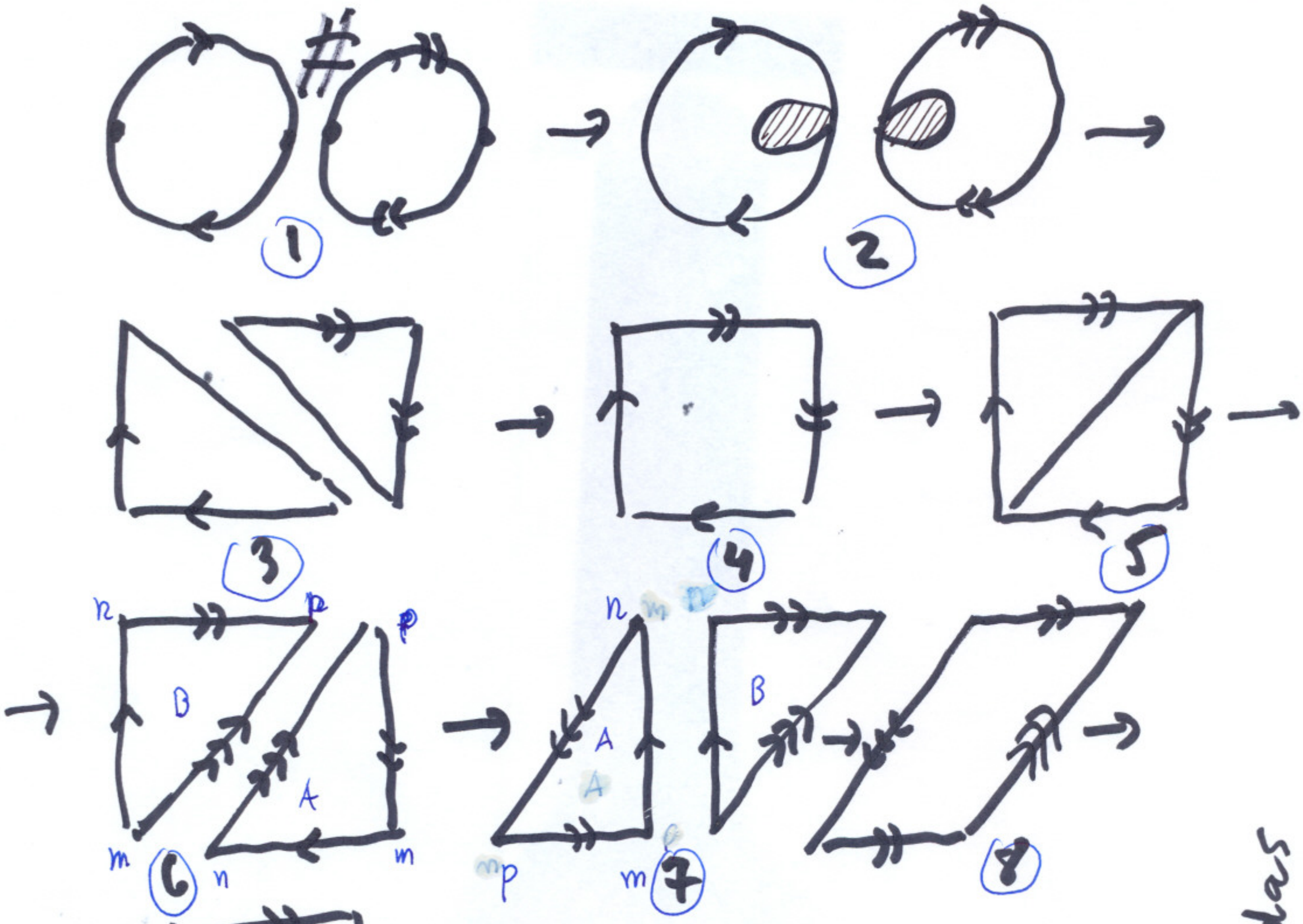
$$T^2 \# T^2 \cong T_2$$

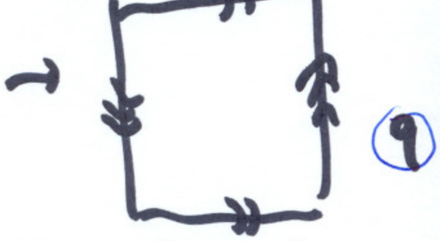
Si sumamos # dos $\mathbb{R}P^2_1 \# \mathbb{R}P^2_2$ da botella de Klein

9-3-07. (27 bis

La suma conexa de dos $RP^2_1 \# RP^2_2$ da una botella de Klein.

En efecto, las figuras que siguen lo prueban (Kosniowski, p 87+) $PR^2 \# PR^2 =$ Klein





De 8 a 9 se pasa por un homeomorfismo

Klein schaube.

Finalmente, sabemos que al pegar dos cintas de Möbius, resulta una botella de Klein, luego esto añadido a lo de más arriba, nos dice que: $RP^2_1 \# RP^2_2 =$ Klein = dos Möbius pegadas

Intercalar con folio 28 11-3-07 C1

Superficies cerradas.

Se pueden descomponer en uno o más polígonos.

El toro → cuadrado → orificio → asa. =

= Superficie anular agujereada

Su fórmula para h asas es

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1}.$$

Con la esfera de h-asas ($h = 0, 1, 2, \ldots$) tenemos la mitad de las superficies cerradas topológicamente distintas.

La otra mitad se deriva de la cinta de Möbius, $cr^{\circ}cr^{\prime\prime -1}$.

El asa y la cinta están contorneadas por un círculo topológico, homeomorfo a la circunferencia. Pero el asa es bilateral, y la cinta unilateral.

Además hay superficies orientables y no orientables.

11-3-07 (2

; la orientabilidad es propiedad interna de las superficies, pero la bilateralidad solo se puede definir por inmersion en un espacio tridimensional.

Como hemos visto del

asa → superficie anular cerrada recubriendo su orificio con un disco.

de igual forma se pasa

de la cinta contorneada de Möbius a una superficie cerrada, cerrando su contorno con un disco. o adaptando al agujero una esfera agujereada

La cinta de Möbius cerrada da lugar a la figura mas importante de la Matematica, despues de la esfera - el PR^2.

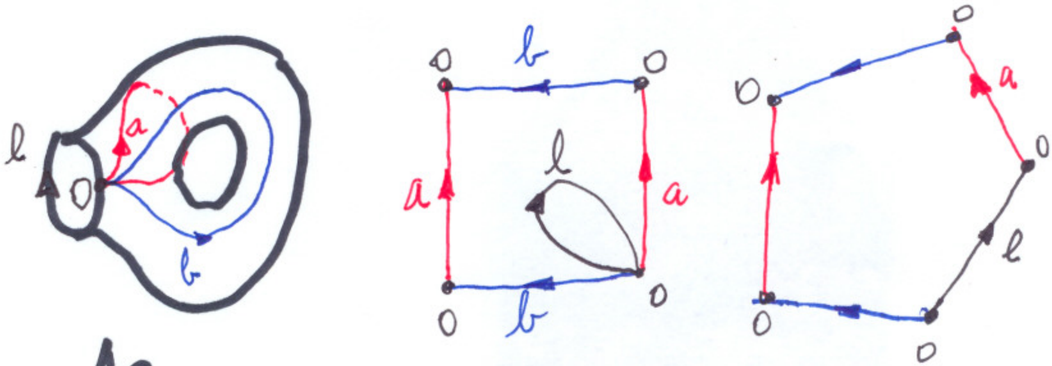
Ver folio 35 para este punto.

Superficies cerradas.

Ya hemos desarrollado el toro, abriéndolo en un cuadrado (polígono fundamental de Poincaré). Como definición de superficie cerrada, daremos:

Def. Aquellas que se pueden descomponer en uno o varios polígonos, que luego al soldarlos apareadamente nos devuelven la figura.

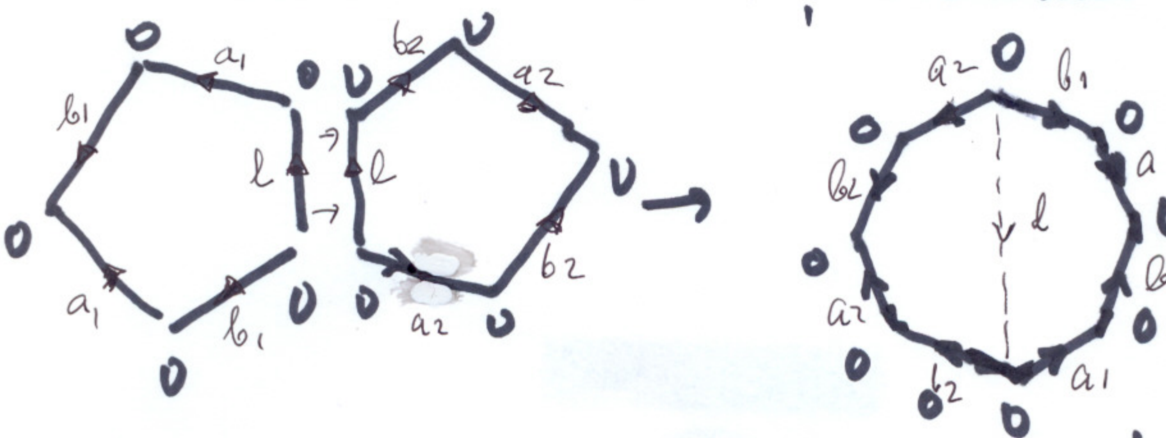
El caso del Toro, convertido en un cuadrado nos permite obtener a partir de él, una serie de superficies cerradas mediante polígonos. Empezamos por abrir un orificio en el toro, que pase por O. Al abrirlo adecuadamente, resultan los polígonos de la Fg 1. El toro agujereado se llama asa (hankel).



Asa

Fg 1.

Si tomamos dos asas, obtenemos (estamos hablando de #, aunque más antiguo)



Al dotar de sentido a los lados del octógono, (doble superficie anular) podemos representarlo por la fórmula

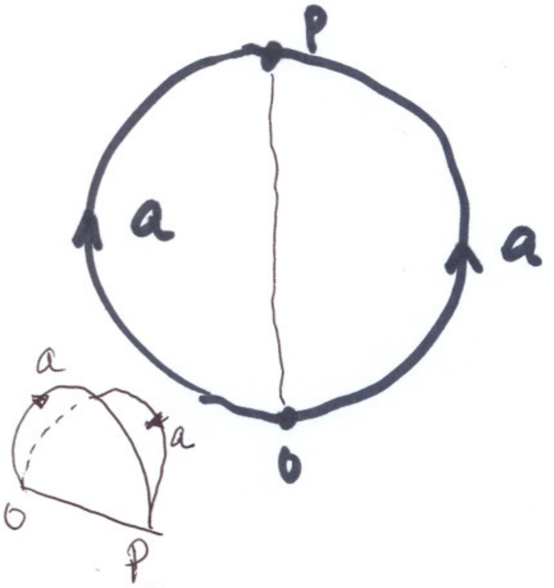
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

El doble toro se puede ver como una esfera a la que se aplican dos asas, y el dodecágono (no representado). sería una esfera con tres asas. Así podemos llegar a la esfera con h asas aplicadas, que tendría por expresión

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$

La esfera también tiene su polígono fundamental. Se obtiene cortándola a lo largo de un arco (meridiano) con los extremos O y P, para llegar al polígono

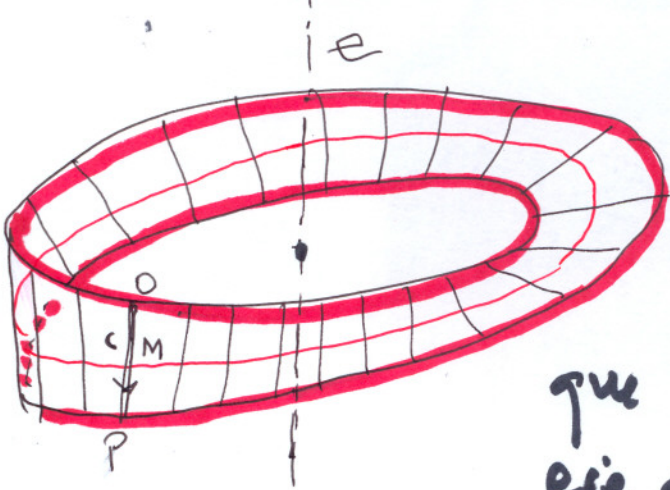
$a\,a^{-1}$



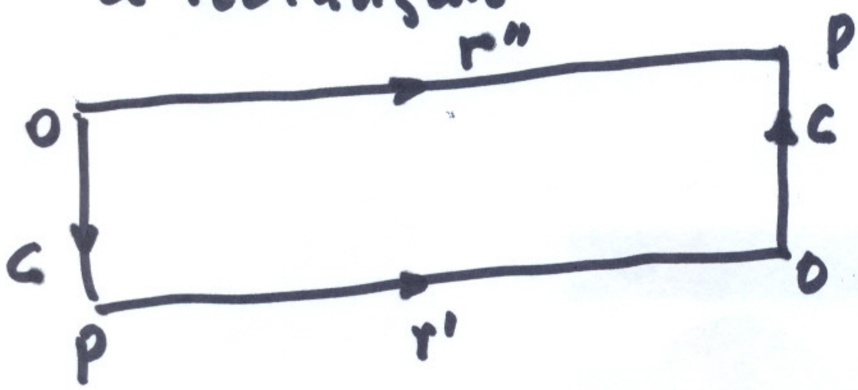
que tiene dos vértices O, P que no son identificables – a diferencia de lo que pasaba anteriormente –.

Para volver a la esfera, bastará considerar la recta OP como charnela y cerrar los arcos a y a, como si fuera un monedero.

Hasta ahora, con la esfera de asas sólo tenemos la mitad de las superficies topológicas cerradas distintas. La otra mitad viene de la cinta de Möbius.



Resulta engendrada por un segmento $c = \overline{OP}$ que gira alrededor del eje e, y al mismo tiempo bascula de forma que la vuelta completa coloca a OP, invertido de su posición inicial. Si cortamos la cinta de Möbius a lo largo de c y la abrimos, resulta el rectángulo

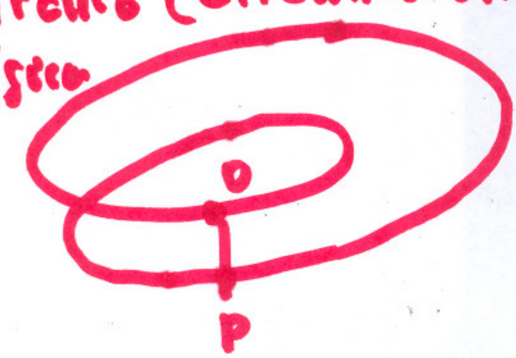


$c r' c r''^{-1}$ con dos vértices no equivalentes. Los r', r'' dan el contorno de la cinta y forman una curva cerrada

debe decir circunferencia

que es un círculo topológico (ver la Fig del folio 3a) que representamos aquí. Los lados que soldamos c y c tienen ahora el mismo exponente, no como pasaba antes, y decimos que están invertidos

círculo (circunferencia) topológico



o que tienen correspondencia de 2ª especie.

Tanto el asa, como la cinta de Möbius están contorneadas por una circunferencia topológica, que es homeomorfa a la circunferencia usual, pero se diferencian en que, el asa es bilateral y la cinta es umitátera. 1-3-07. 32

Sin embargo, la unilateralidad, la bilateralidad, dependen de la inmersión de la superficie en un $\mathbb{R}^3$, pero la orientabilidad es una propiedad intrínseca de las superfies.

Del "asa" pasamos a la superficie anular cerrada, cubriendo su agujero con un disco (un circulo), también de la cinta contorneada podemos obtener una superficie cerrada, cubriendo su contorno circular con un disco o adaptando al mismo una esfera agujereada. Esta adaptación produce auto-penetraciones, cuando estemos en R^3, y parece ~~su~~ que se demuestra como se cierra la cinta, sin autopenetraciones cuando estamos en $\mathbb{R}^4$.

La cinta de Möbius, cerrada como hemos dicho, es después de la esfera la más importante de las superficies cerradas, y se conoce como el plano proyectivo.

En la geometría proyectiva, se cierra el plano euclídeo con la recta impropia, y en esta forma de concebirlo, a los puntos del plano proyectivo corresponden biunívocamente, tres números reales $x_1 : x_2 : x_3$ de los que únicamente hay que excluir la terna $0:0:0$

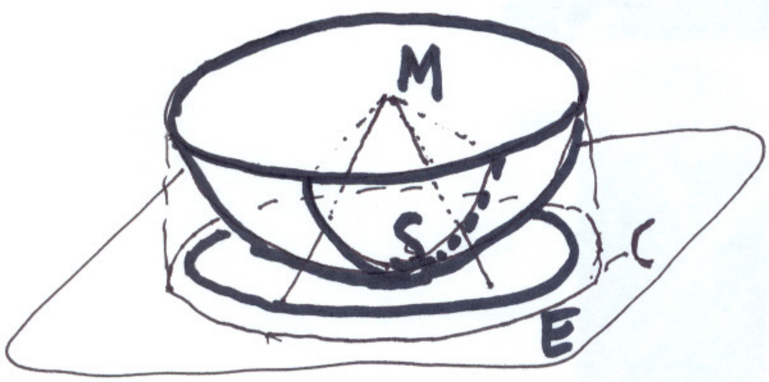
Si pensamos x_1, x_2, x_3 como coordenadas cartesianas homogéneas de forma que

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad , \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

Sean las coordenadas cartesianas ordinarias del plano euclídeo, éste se cerrará en el plano proyectivo, mediante la recta impropia, de ecuación $x_3 = 0$

Si x_1, x_2, x_3 se toman como coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$, los puntos proyectivos quedarán relacionados biunívocamente con las rectas que pasen por el origen.

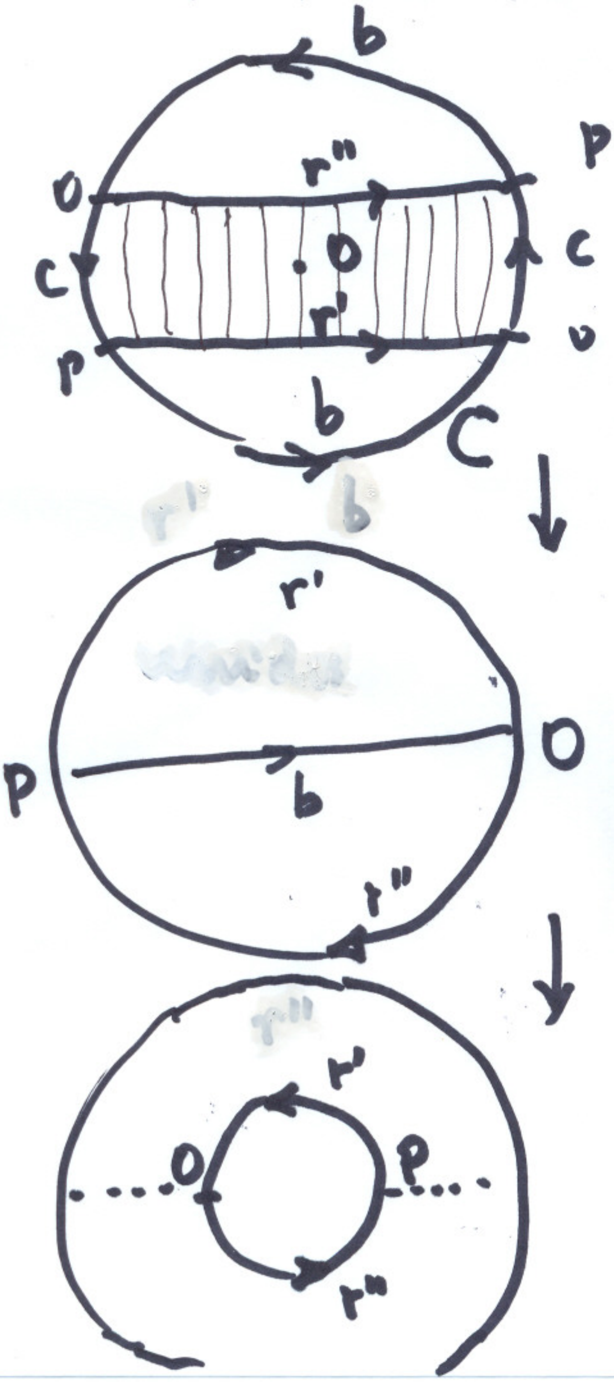
Comprobamos que coinciden topológicamente hablando, la variedad de estas rectas con los puntos de la cinta cerrada de Möbius.



Describimos la esfera unidad, con centro M y las rectas que forman la radiación y pasan por M, cortan a la esfera en puntos diametralmente opuestos, que vamos a considerar como no distintos. Por lo tanto podemos limitarnos a considerar sólo los puntos del hemisferio SUR., siempre que apareemos los puntos diametralmente opuestos sobre el ecuador. Si proyectamos el hemisferio sobre el plano E, tangente en el polo Sur, habremos representado el plano projectivo sobre el círculo unidad, una vez cerrada la circunferencia ecuatorial, con la identificación de los puntos diametralmente opuestos.

Los puntos resultantes de proyectar el ecuador sobre el plano E, son los correspondientes a los puntos de la recta proyectiva impropia con la que cerrábamos el plano euclídeo.

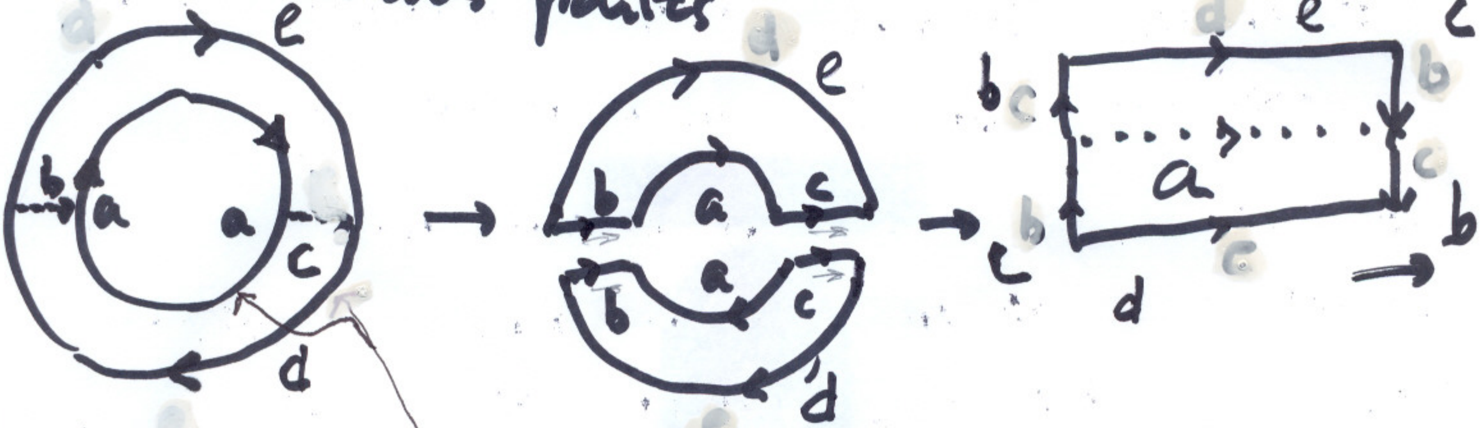
La coincidencia del plano proyectivo con la cinta cerrada de Möbius se comprueba partiendo del círculo C, y trazando las



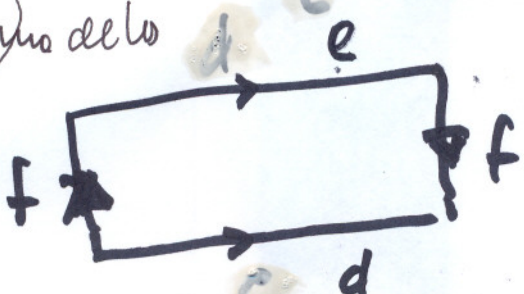
rectas paralelas r', r'', equidistantes del centro, y ya tenemos la cinta de Möbius <r'<r''>, al identificar los puntos diametralmente opuestos O, P.

Si el plano proyectivo es topológicamente hablando, una cinta de Möbius cerrada, ésta misma cinta sin cerrar se convierte en un plano proyectivo perforado.

La explicación de la tercera Fig, es la que sigue: Separamos la corona circular en dos partes



Identificando uno de los bordes de la corona (el interior.)



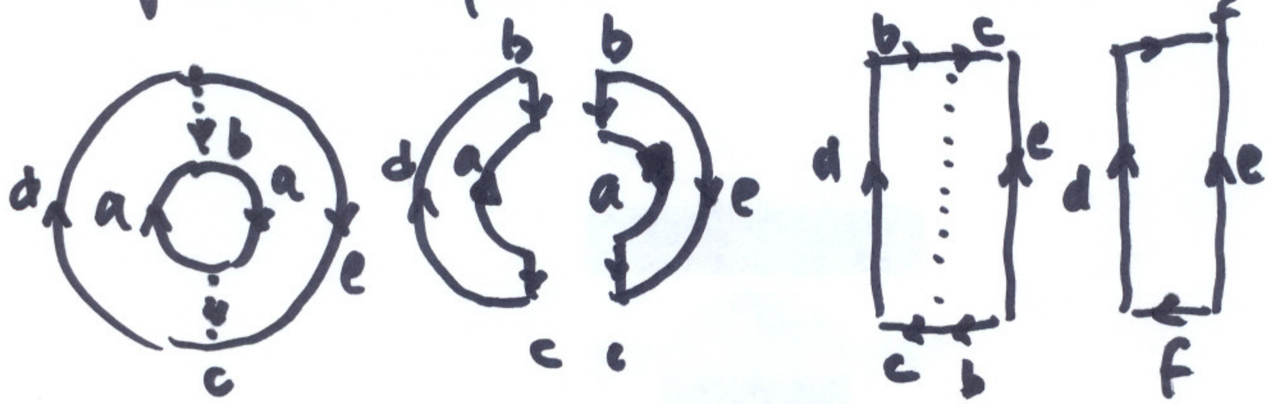
cinta de Möbius

La representación sobre el círculo nos da el polígono fundamental del plano proyectivo, expresada por

a a:

de una superficie cerrada arbitraria, se obtiene una nueva superficie si se recorta en ella un orificio circular y sobre este se aplica una cinta de Möbius. La cinta de Möbius aplicada a un orificio circular, se llama

Partimos de una corona circular e identificamos los puntos de su borde interior

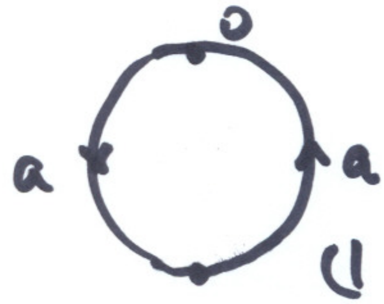


Cortamos en dos partes; deformamos estas dos partes en dos rectángulos, que unimos a lo largo del lado equivalente a.
Sale un rectángulo con f unión de b y c
Uniendo los lados f retorciendo primero, tenemos una cinta de Möbius
Luego si de la corona circular hemos obtenido, tanto una copia cruzada, como una cinta de Möbius, podemos concluir que entre la copia cruzada y la cinta de Möbius hay un homeomorfismo, en el cual, la línea de penetración de aquella es la línea mediana de Möbius.

a veces, cofia cruzada

Nos faltan todavía superficies cerradas, que resultan de adaptar a la esfera cintas de Möbius.

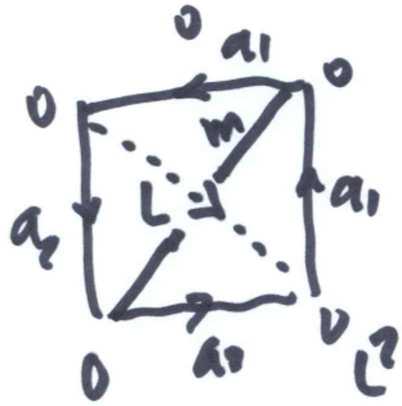
Partimos del plano proyectivo y le hacemos



un orificio que pase por O, que es L

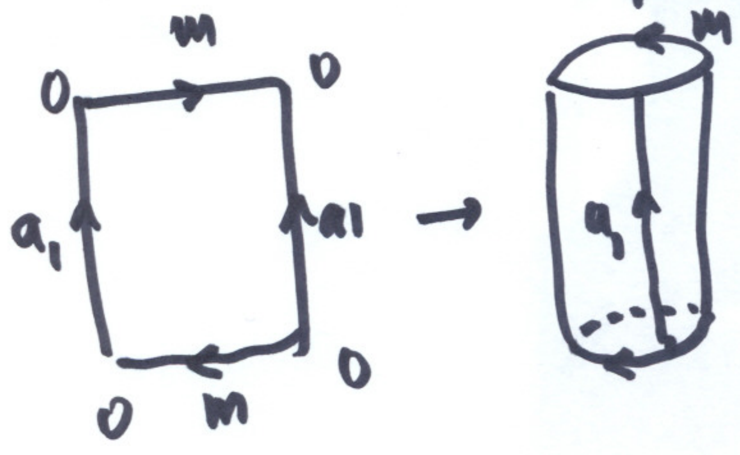
Cortando por O, y adaptando resultará un triángulo a_1a_1L y otro $a_2a_2L^{-1}$, que dan la figura 2. de polígono $a_1a_1a_2a_2$ (fig 2). Prescindimos de la

(1



separación L, nos queda la f. 3

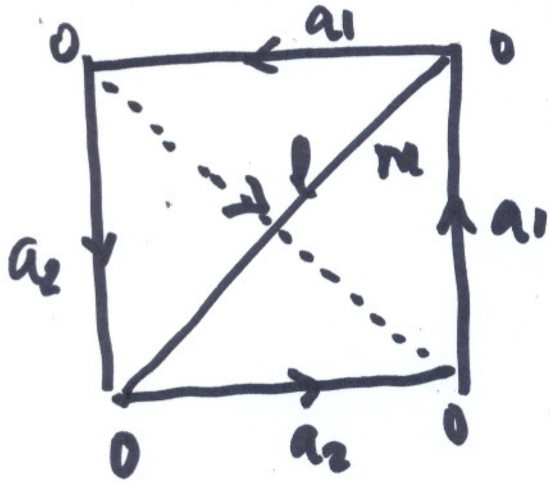
(2



que es la manga unilátera, o superficie anular no orientable (Botella de Klein).

Las superficies cerradas que nos faltan todavía salen de aplicar a la esfera cintas de Möbius. Como con las asas.

Partimos del plano proyectivo, y hacemos en él un orificio, cuyo contorno l, pase por 0. Adaptando los dos triángulos resultantes $a_1 a_1 l$ y $a_2 a_2 l^{-1}$, prescindiendo de l, resulta el cuadrilátero



$$a_1 a_1 a_2 a_2$$

que es el polígono fundamental de la esfera con dos cintas de Möbius adaptadas.

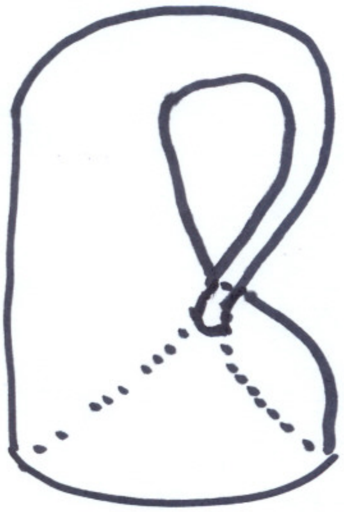
Esta superficie es la manga unilátera o superficie anular no orientable.

Si cortásemos el polígono fundamental a lo largo de la diagonal m, distinta de la l, resultarían dos triángulos que unidos a lo largo de a_1 nos dan, un nuevo cuadrilátero de contorno

$$a_1 m a_1^{-1} m$$

que encorvándolo, nos da el cilindro, que

tiene los contornos de sus extremos recorridos en sentido inverso. Al intentar hacer que se superpongan las dos circunferencias m, hay que retorcer el cilindro y atravesarlo, para llegar a la botella de Klein. Es superficie unilátera y no tiene contenido



Adaptando k cintas de Möbius a la esfera, conseguimos una superficie cerrada de polígono fundamental

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_k a_k$$

Todavía no sabemos si con las superficies cerradas enumeradas, tenemos todas las posibles.

La contestación a ésta pregunta_sin que demos aquí la demostración, que requiere varias sesiones para desarrollarla_es:

Hay tres formas de polígonos fundamentales:

1ª aa^{-1}

2ª $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}$
esfera con h asas

3ª $a_1a_1a_2a_2\cdots a_ka_k$
esfera con k cofias.

y como consecuencia de esto vale el Teorema Fundamental de la Topología de las Superficies.

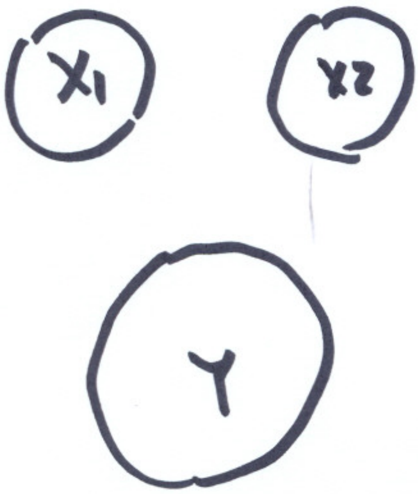
Dos Superficies cerradas son homeomorfas $\leftrightarrow$ coinciden sus características y la orientabilidad.

La Superficie cerrada orientable más general es la esfera con h ($h\geq 0$) asas, y la no orientable la esfera con k (≥ 1) cofias cruzadas.

10-3-07.

Conexión. (Nash-Sen, p19).

Sea $X = X_1 \cup X_2$ y $\phi = X_1 \cap X_2$: entonces



X no es conexo.

Massey p 56.

Un espacio X es arco-conexo por caminos, si dos puntos cualesquiera de X, se pueden unir por un arco.

Kosniowski, 121.

Contráctil es un espacio X si resulta homotópicamente equivalente a un punto.

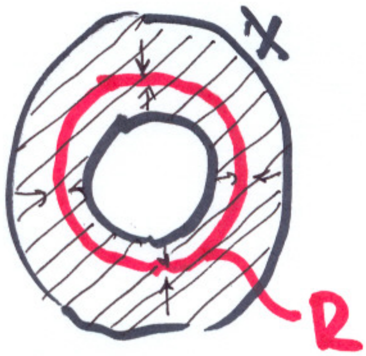
Retracto es un subconto A de un espacio topologico X, cuando hay una aplicación continua $r: X \to A$: $ri = 1: A \to A$, donde i es la inclusion

Nakahara, p97.

R / o .es subespacio de X. Si hay

10-3-07

una aplicación continua $f: X \to R$: $f|_R = id_R$, R es un retracto de X y f una retracción



R es una retracción de X.