4-3-07.

Lección 3ª

Introducción

3.1. Grupos abelianos. Teorema fundamental.

G_1 y G_2 son grupos abelianos.

La aplicación

$$f: G_1 \to G_2$$

es un homomorfismo, si

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Si f es bijectiva, entonces tenemos un isomorfismo, denotado $\cong$.

Por ej., la aplicación $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ definida por

$$f(2n) = 0 \quad f(2n+1) = 1$$

es un homomorfismo.

Si H es subgrupo de G, $x, y \in G$ son equivalentes si:

$$x - y \in H. \quad \text{o} \quad x \sim y.$$

$\sim$ es una relación de equivalencia y G/H es el grupo cociente. Sus elementos son las clases de equivalencia, que se representan $[x]$, $[y]$.

intercalar con (2 20-3-07

Nakahara. p 63.

Teorema fundamental de homomorfismo

Sea $f : G_1 \to G_2$ un homomorfismo. Entonces

$$G_1/_{\ker f} \cong \operatorname{im} f \qquad (\cong \text{ isomorfismo})$$

Demostración:

1º Ambos miembros son grupos.

2º Se define una aplicación $\varphi: G_1/\ker f \to \operatorname{Im} f$, por

$$\varphi([x]) = f(x).$$

Esta aplicación está bien definida,

A) ya que para $x' \in [x]$, $\exists h \in \ker f$: $x' = x + h$. y $f(x') = f(x+h) =$
$= f(x) + f(h) = f(x) + 0 = f(x)$.

B) Probaremos que φ es isomorfismo, empezando por demostrar que

B1) antes de todo φ es homomorfismo, ya que
$$\varphi([x]+[y]) = \varphi[x+y] = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varphi[x] + \varphi[y]$$

B2. φ es one-to-one, pues si $\varphi([x]) = \varphi([y])$, entonces $f(x) = f(y)$ o sea $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$. Así vemos que $x - y \in \ker f$ y $[x] = [y]$

B3. Finalmente, φ es sobre; si $y \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in G_1$: $f(x) = y = \varphi([x])$

c.q.d.

4-3-07. (2

La operación + da lugar a que

$$[x]+[y]=[x+y]$$

pero el + del 1er miembro se da entre clases de equivalencia, mientras el + del 2º miembro vale para elementos de G.

El Teorema fundamental, dice:

Sea $f: G_1 \to G_2$ un homomorfismo; entonces

$$G_1/\ker f \cong \operatorname{im} f.$$

Ej Sea $f: Z \to Z_2$ definido por

$$f(2n)=0 \quad f(2n+1)=1$$

Entonces $\ker f = 2Z$, $\operatorname{im} f = Z_2$ son grupos y el Teorema, nos dice que

$$Z/2Z \cong Z_2.$$

3.2 Grupos abelianos con un número finito de generadores y grupos abelianos libres

Sea G un grupo abeliano. Un conjunto $\{g_i\}$ de elementos de G es un conjunto de generadores de G, si cualquier elemento de G se puede expresar

$$g = \sum n_i g_i$$

con los g_i linealmente independientes ($n_i \in Z$).

Teorema: Si A es un grupo abeliano finitamente generado (no necesariamente libre) por n generadores, entonces

$$A \cong F/R = G + Z_{h_1} + \cdots + Z_{h_m}$$

donde F y R son grupos abelianos libres finitamente generados, con $R \subset F$, y G es un grupo abeliano libre de rango n-m y Z_{h_i} es un grupo cíclico de orden h_i. (rango = nº generadores l. indep.)

Cíclico el grupo generado por un elemento x.

$G = \{0, \pm x, \pm 2x, \ldots\}$ Si $nx = 0$ para algún $n \in Z - 0$, es cíclico finito de orden n.

Si no, es cíclico infinito

El grupo $Z_{h_1} + Z_{h_2} + \cdots + Z_{h_m}$ se deno-

-mina grupo de Torsión T.

Con otra notación (Nakahara, p65), todo lo anterior viene representado por:

$$\underset{m}{G} \cong \underbrace{Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z}_{r} \underbrace{\oplus Z_{k_1} \oplus \cdots \oplus Z_{k_p}}_{p}$$

siendo m = número de generadores y

$$m = r + p$$

r = rango de G

(La suma es directa, $\oplus$, puesto que estamos hablando de grupos abelianos, donde el producto directo se convierte en suma directa)

3.2. Homología.

Antes de tratar la homología, hay que decir algo sobre grupos cíclicos (Nakahara, p64-65).

Si el grupo G es generado por un elemento x, $G = \{0, \pm x, \pm 2x, \ldots\}$, G es cíclico.

4-3-07 [5

Puede ser cíclico finito o infinito

Finito si $nx = 0$ para algún $n \neq 0$. Infinito en caso contrario.

Tomemos G grupo cíclico finito, generado por x, y sea

$$f : Z \to G$$

un homomorfismo dado por

$$f(n) = nx.$$

Si hacemos G finito y por ej.

$$G = \mathbb{Z}/\ker f = G \cong Z/nZ = Z_n$$

Si H es un subgrupo de G podemos tomar p generadores de los m generadores que tiene G, de forma que

$$k_1x_1 \quad k_2x_2 \ldots \quad k_px_p$$

generan H, y $H \cong k_1Z \oplus \ldots \oplus k_pZ$ con

$$G = Z \underbrace{\oplus \ldots \oplus}_{r} Z \oplus Z_{k_1} \oplus \ldots \oplus Z_{k_p}$$

siendo $m = r + p$.

la p 6 está en p15 →

a una figura dada. Esto fue probado por Poincaré.

3.2. Homotopía.

Es el estudio de los espacios topológicos usando una relación de equivalencia menos estricta que los homeomorfismos. Esto dá una mayor riqueza de problemas para abordar, pero al mismo tiempo hace que la teoría sea más incompleta pero más fecunda

Así, mientras que los homeomorfismos dan lugar a clases de equivalencia cuyos elementos son espacios topológicos, la homotopía da lugar a clases de equivalencia, cuyos miembros son aplicaciones continuas. Si tomamos dos aplicaciones continuas (notar las equigencias de los homeomorfismos (bicontinuas y bijectivos) con las a las homotopías - continuidad:

$$f_1 : X \to Y$$

$$f_2 : X \to Y$$

diremos que f_1 y f_2 son homotópicas ($\simeq$) si f_1 se puede convertir en f_2, es decir si:

$$F : X \times [0,1] \to Y \quad F \text{ continua}$$

y además

$$F(x,0) = f_1(x)$$

$$F(x,1) = f_2(x)$$

Dicho de otra forma, la variable real $t \in [0,1]$ en $F(x,t)$ cambia de manera continua de 0 a 1 y simultáneamente la función f_1

cambia a la fe.

La Homotopía, es una relación de equivalencia, y divide al espacio formado por las aplicaciones continuas de X a Y, escritas C(X,Y), en clases de equivalencia. Dado que los homeomorfismos son aplicaciones bicontinuas, no influyen sobre la división en clases que hemos realizado con las aplicaciones continuas de la X en la Y.

Por esta razón las clases de equivalencia homotópicas son invariantes topológicos del par de espacios X,Y. Para clasificar los espacios topológicos mediante la homotopía, se toma como espacio X, la esfera S^n, y al comparar S^n con Y, y con Y', advertimos si hay o no diferencia entre estos espacios.

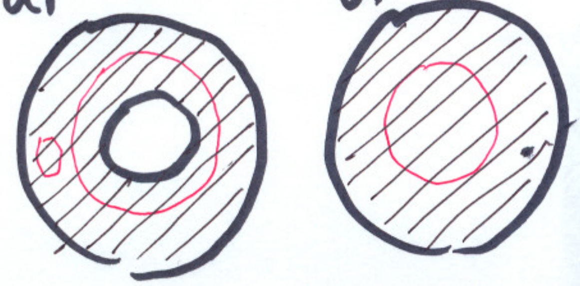
Las clases de equivalencia, las podemos representar, escribiendo

$$[S^n, Y] \text{ ó } C(S^n, Y).$$

(La expresión $C(X,Y)$ nos dice sobre la división del espacio de las aplicaciones continuas en clases de equivalencia) Es factible asociar las clases de equivalencia, con una estructura de grupo. De esta convertimos un problema geométrico en un problema algebraico. En esta forma conversión, radica la potencia de la Homotopía, para estudiar los espacios topológicos. Si no podemos convertir las aplicaciones de las clases de equivalencia E_1 en las aplicaciones de las clases de equivalencia E_2 (continuas por supuesto) es decir de que hay una "obstrucción", que impide éste cambio

Detectar ésta "obstrucción" que será un invariante topológico, es el logro de las homotopías, y por ello, reconocemos la fecundidad de la teoría.

a) b)



Los discos a) y b) difieren en que a) tiene un agujero, y b) no.

En a) el lazo, en rojo, no puede cerrarse a un punto; en b) sí es posible. Además en a) también cabe formar un lazo que evite el agujero, como vemos en la Fig.

Así en b) cualquier loop es homotópico a un punto, y hay sólo una clase de homotopía; en a) vemos que hay dos clases de homotopía. El número de veces que el loop recubre el (mejor, circunda el agujero) es $n \in \mathbb{Z}$, según

el número de vueltas que da, 14-3-07 (12
en el sentido positivo o negativo de giro.
Si $n=0$, estamos hablando del caso a), el agujero pequeño.

Caminos y loops.

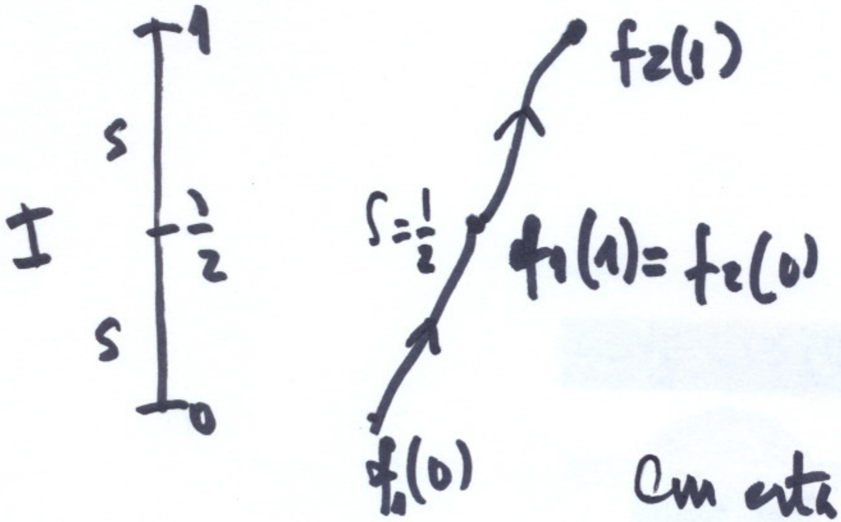
X es un espacio topológico e $I = [0,1]$.
Una aplicación continua $f: I \to X$ es un camino (path), con punto inicial x_0 y final x_1, si $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$. Si $f(0) = f(1) = x_0$, el path se llama un loop, con x_0 como punto base.
Un path constante es $c_x(s) = x$, $s \in I$.
Definición: si $f, g: I \to X$ son paths tales que $f(1) = g(0)$, el producto $f_1 * f_2$ se define (f_1 f_2 son paths en X).

$$f_1 * f_2 = \begin{cases} f_1(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f_2(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

El path inverso de $f: I \to X$, (x_0 a x_1) es

$$f^{-1}(s) \equiv f(1-s).$$

En la Fig que sigue, representomamos el producto $f_1 * f_2$



Conviene expresar en loops, las definiciones y teoremas de la Fecha

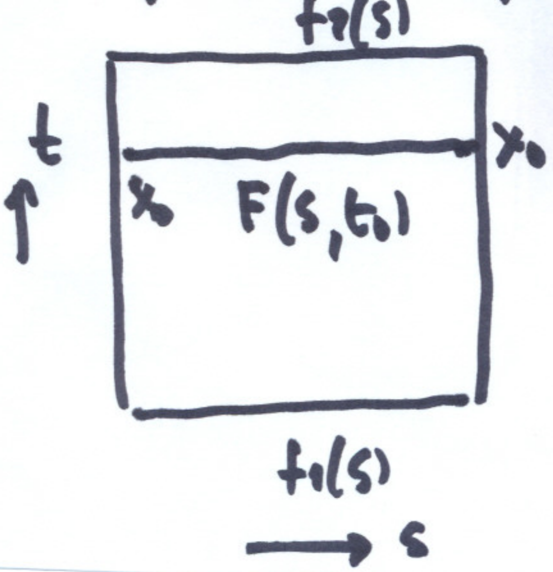
Con esta aplicación, podemos definir:

Sean $f_1, f_2 : I \to X$ dos loops en x_0. Se dice que son homotópicos, y se escribe $f_1 \simeq f_2$ si hay una aplicación continua $F : I \times I \to X$:

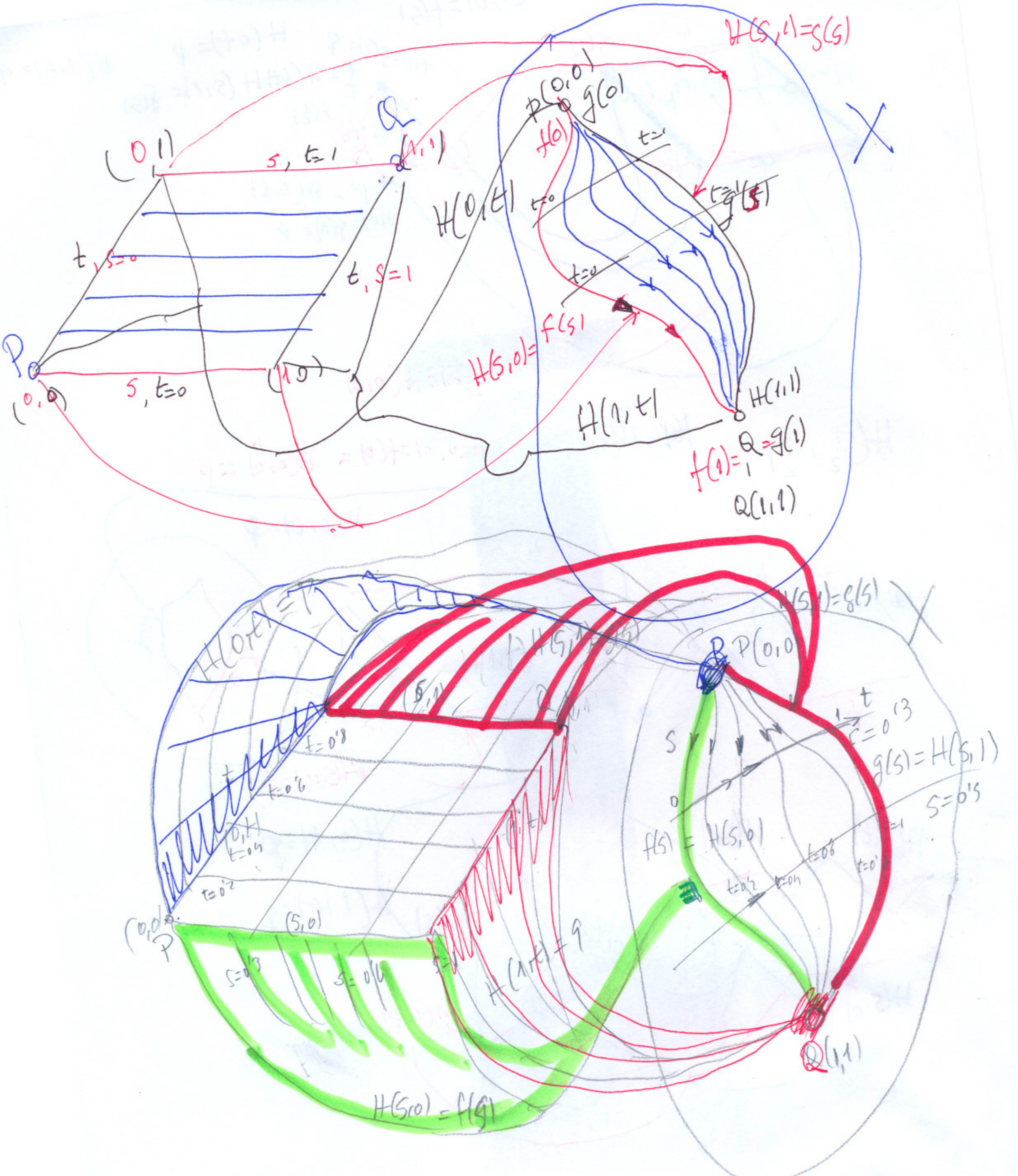
$$F(s,0) = f_1(s), \quad F(s,1) = f_2(s), \quad s \in I,$$

$$F(0,t) = F(1,t) = x_0, \quad t \in I.$$

Gráficamente, lo representamos según la Fig.



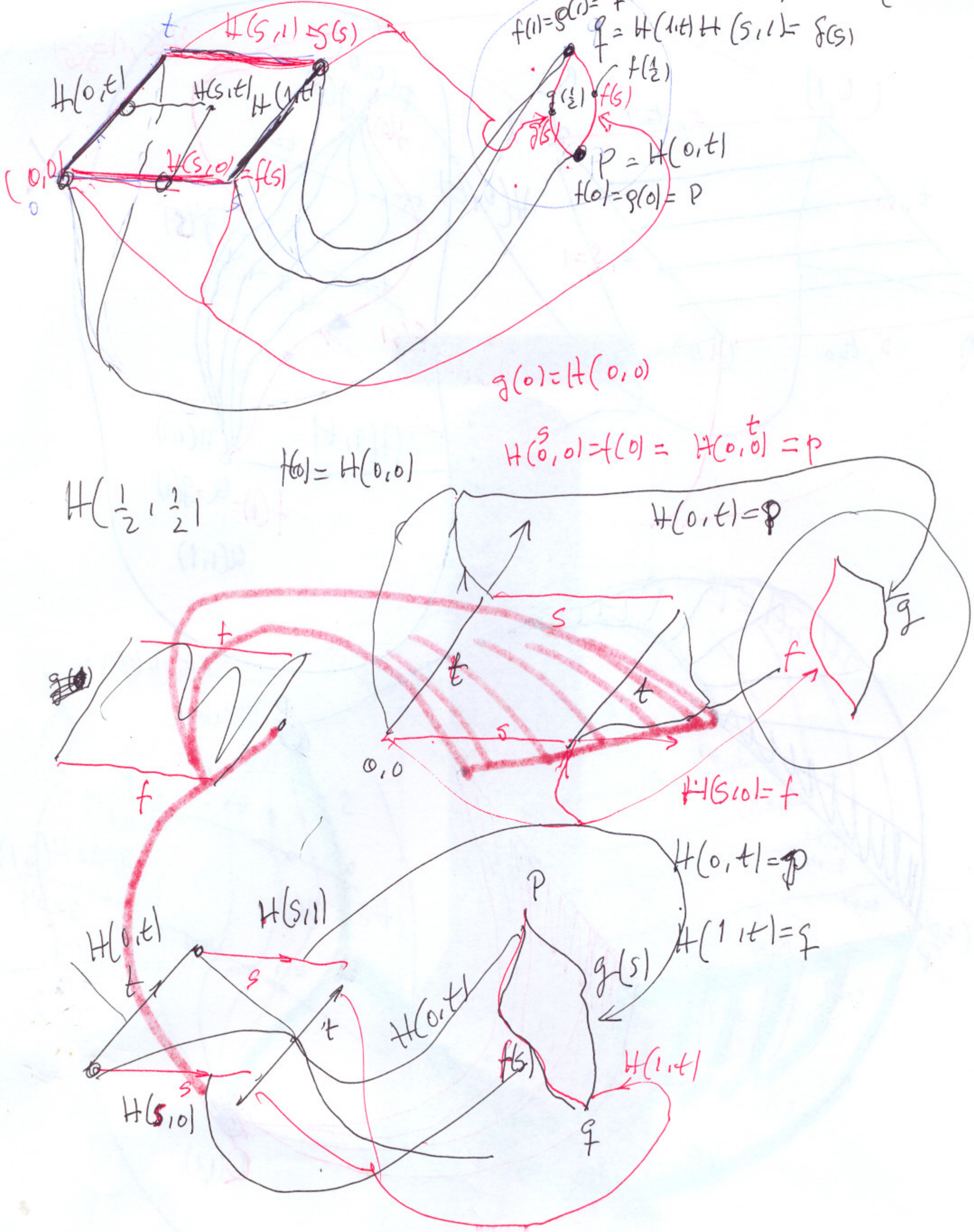
F es una homotopía que interpola los loops f_1 en los loops f_2 de forma continua, la imagen de f_1 se deforma en la imagen de f_2.



$H(s,1)=g(s)$ | $H(1,t)=q$ | $H(0,t)=H(1,t)=x_0$ si forman loops ($p=q$)

$H(s,0)=f(s)$ | $H(0,t)=p$

$H(s,0)=f(s)$ $\quad H(0\,t)=p$ $\quad H(1,t)=q$



Sin Demostración, admitimos que: 14-3-07

La clase de equivalencia de loops se denota por $[f_1]$ y se denomina "la clase de homotopía de f_1". El producto de loops define el producto en el conjunto de las clases de homotopía de Loops.

El conjunto de clases de homotopía de loops en $x_0 \in X$ se denota por

$$\pi_1(X, x_0)$$

y se llama el grupo fundamental o 1er grupo de homotopía.

También diremos que el grupo fundamental es invariante para los homeomorfismos y por eso es, un invariante topológico.

* * *

Retracción

Si $R (\neq \phi)$ es un subespacio de X, una aplicación contínua $f: X \to R : f|_R = id_R$

Homología. Debe ir en p 15 4-3-07 (6

Simplices, son los elementos que forman un poliedro. En homología hay que construir poliedros que sean homeomorfos a las superficies que vamos a estudiar.

Por ej. Sea X un subconjunto de R^3 homeomorfo a un poliedro K. Entonces, la característica de Euler $\chi(X)$ de X, se define por

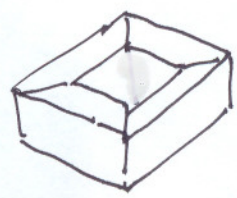
$\chi(X) = ($nº caras + nº vertices − nº aristas en K

Para los poliedros clásicos, tetraedro...

$\chi($tetraedro$) = \chi($cubo$) = \ldots = 2.$

Si el poliedro es homeomorfo a un toro

$\chi(\text{Toro}) = 16 + 16 - 32 = 0.$



C = 16
V = 16
A = 32

C=1 V=2 A=1

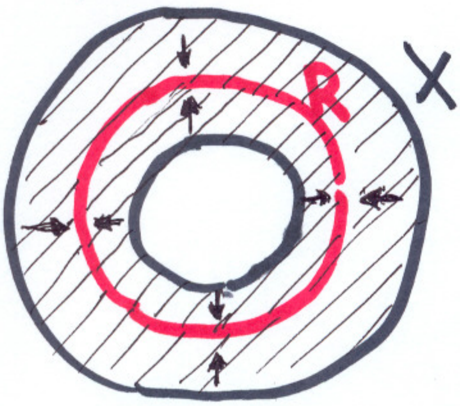
$\chi(\text{Möbius}) = 0$

C=1 V=1 A=2

$\chi(\text{Klein}) = 0$

$\chi(\text{Toro}) = C + V - A = 16 + 16 - 32 = 0$ (Toro).

y estos números, son invariantes, cualquiera que sea el poliedro homeomorfo es una retracción.



La circunferencia R es un retracto de la corona circular X. El grupo de S^1

En folio 15 bis, doy una interpretación de la prueba en Nakahara, p 99.

No hay espacio para entrar en la representación de otros grupos fundamentales, y hemos de pasar a partir de ahora a ocuparnos de la homología.

Homología: 3.3

Hemos empezado nuestro breve repaso a la Topología Algebraica, hablando de los homeomorfismos: una fuerte restricción para las transformaciones que nos eran permitidas.

Después de los homeomorfismos, "abriendo un tanto la mano", hemos considerado las transformaciones continuas, no de los

16-3-07. 15 bis

grupo fundamental de la circunferencia

Nakahara p 99. **Para intercalar entre 15-16**

En esta Nota, reproduzco la demostración que da Nakahara para la obtención del grupo fundamental de la circunferencia, añadiéndole la interpretación de lo que a cuanto acontece en esa demostración.

Partimos de S^1 y $\mathbb{R}$, establecido [illegible] $p:\mathbb{R}\to S^1$

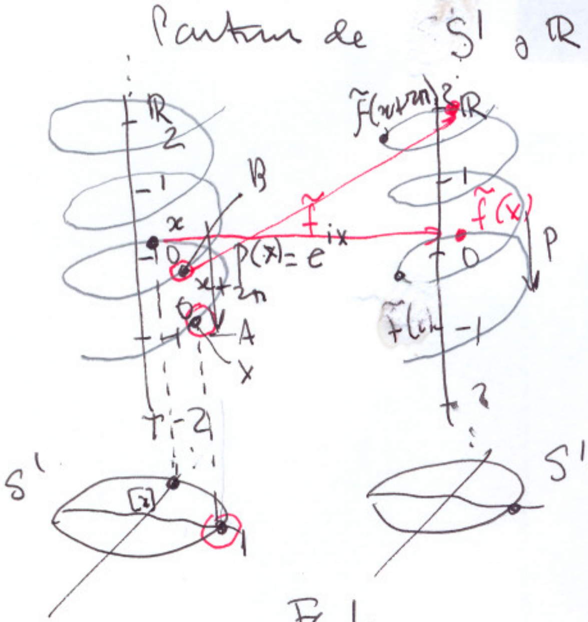


Fig 1.

definida por $p: x\to e^{ix}$, de forma que para $x=0$, resulta

$$p(0)=e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1$$

Imaginamos que $\mathbb{R}$ se enrolla alrededor de S^1 y resulta la hélice de la fig 1; el 1 se toma como punto base.

$1=f(1)$

Si $x, y\in\mathbb{R}$, dan $x-y=2\pi m$ $(m\in\mathbb{Z})$ (por ej $m=3$, es decir

$$x-y=2\pi\cdot 3=6\pi$$

quedan aplicados sobre el mismo punto de S^1, y escribiremos $x\sim y$ (x es equivalente a y), de forma que la clase de equivalencia es

$$[x]=\{y\,|\,x-y=2\pi\cdot 3\},\quad m=3$$

. De aquí se deduce que $S^1\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ($\cong$: isomorfismo)

Ahora tomamos una función $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumpla las condiciones

$$\tilde{f}(0)=0 \quad y \quad \tilde{f}(x+2\pi)\sim\tilde{f}(x)+2\pi n$$ (representado en rojo)

siendo n un entero, llamado "grado" de f, y denotado $grad(f)$.

Mientras x da una vuelta sobre S^1, $\tilde{f}$ da n vueltas sobre la hélice. En la fig 1, x va de A a B, mientras que $\tilde{f}(x)$ va de $\tilde{f}(x)$ a $\tilde{f}(x+2\pi)=\tilde{f}(x)+2\cdot n\pi$ ($n=2$ en nuestro ejemplo)

Con esto hemos obtenido una clase de equivalencia. Dando a n los valores ... −3 −2 −1 0 1 2 3 ... obtenemos la prueba de que el grupo de la circunferencia está formado por $\mathbb{Z}$ clases de equivalencia. (c. q. d).

Habría que retocar las figuras a mayor tamaño, para ver con claridad los puntos x, y y sus correspondientes al pasar de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Este paso de una a otra especie, no es otra cosa que la homotopía de la que estamos hablando.

espacios sino de las aplicaciones continuas
- paths y loops - resultando así el ca-
pítulo de los homotopías.

Homología.

El tercer ataque, ha de venir ahora de
considerar la poliedrización de los ele-
mentos topológicos y detectar los posibles
"holes" que pueden darse en ellos, abriendo
de esta forma, una nueva manera de es-
tudiar las "obstrucciones" que pueden pre-
sentarse al estudiar los entes topológicos.

En la homotopía considerábamos cuando los
"loops" se pueden reducir a puntos, me-
diante transformaciones continuas, esto es,
queríamos detectar las "obstrucciones"; en
la Homología, después de haber poliedri-
zado el espacio, buscamos los "holes", y com-
pletamos la investigación precedente.

Lo primero que hacemos es considerar
(n+1) puntos l. independientes, que se pue-

den dar en un espacio con n-dimensiones. Esto es un poliedro en $\mathbb{R}^n$.

Pero los "ladrillos" de este poliedro, forman una familia que va de

el 0-simplex $\langle p_0 \rangle$ formado por un punto

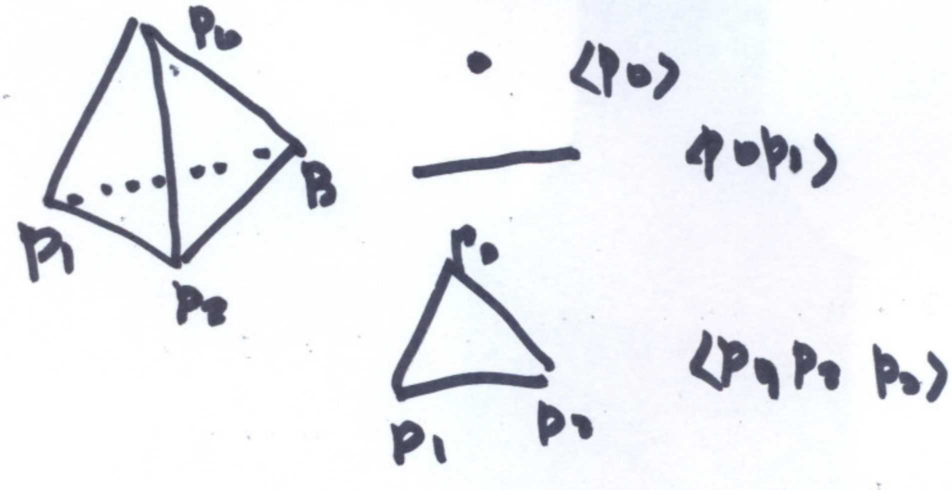
1-simplex $\langle p_0 p_1 \rangle$ " dos "

...

$(n-1)$-simplex $\langle p_0 p_1 \cdots p_{n-1} \rangle$ " n puntos

al n-simplex $\langle p_0 p_1 \cdots p_n \rangle$ " $n+1$ puntos

Para fijar las ideas, un 3-simplex será $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$, que está constituido por 4 vértices, 6 aristas, 4 caras y el tetraedro de la Fig.



El tetraedro finalmente.

Definición. K es un número finito de simplexes en $\mathbb{R}^n$. Si estos elementos están relacionados correctamente, obtenemos un complejo simplicial.

Las condiciones para la corrección son:

1ª Si una cara de un simplex pertenece al complejo → si $\sigma' \leq \sigma \Rightarrow \sigma' \in K$. ($\sigma'$ será una arista, o un punto en el caso del tetraedro

2ª Si σ, σ' son caras del teliseado, entonces

a) $\sigma \cap \sigma' = \phi$

b) $\sigma \cap \sigma' \in \sigma, \sigma'$

A partir de un espacio topológico, obtenemos una triangulación. valgo como ejemplo. La Fig 2 es una triangulación de un cilindro, $S^1 \times [0,1]$

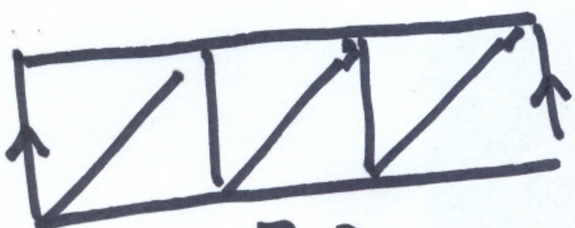
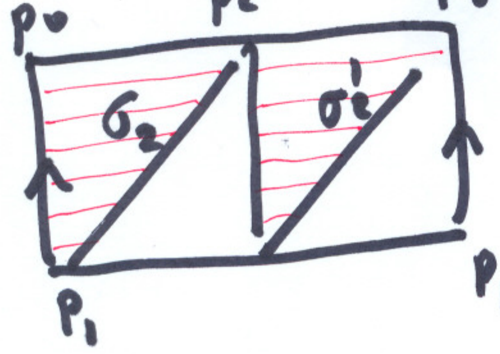


Fig 2

, pero la figura 3, más sencilla, no es apta, ya que



$\sigma_2 \cap \sigma_2' = \langle p_0 \rangle \cup \langle p_2 \rangle$ que no dan el vacío, ni un simplex (condiciones a), b) anteriores).

3. Grupos de homología de complejos simpliciales

Lo primero que vamos a hacer es orientar los simplexos.

Los 1-simplexos se orientan mediante una flecha que va de p_0 a p_1, y lo escribimos $(p_0 p_1)$. Se puede orientar al revés, de p_1 a p_0, y pondremos $(p_1 p_0)$, conviniendo

que $(p_0 p_1) = -(p_1 p_0)$

para un 2-simplex $\langle p_0 p_1 p_2 \rangle$, cabe seguir

la flecha curva y decir que la orientamos $(p_0 p_1 p_2)$.

$\langle\ \rangle$ para simplexos

$(\ )$ " " orientados.

Las orientaciones $(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2 p_0) = (p_2 p_0 p_1)$

y las $(p_2 p_1 p_0) = (p_1 p_0 p_2) = (p_0 p_2 p_1)$ opuestas

17 - 3 - 07

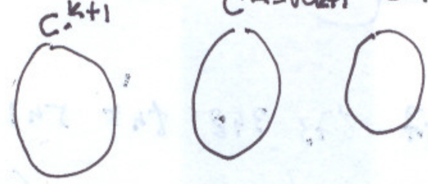
Cuando para un complejo algebraico C, vale

$$\dot{C} = 0$$

se dice que C es un <u>ciclo</u>

Una cadena se dice cerrada o ciclo, cuando su borde (∂) se anula.

Toda cadena contorneadora es cerrada. Esto significa que las cadenas contorneadoras C^k y el borde de C^{k+1}, ∂ por las bases su $\partial C^k = 0$

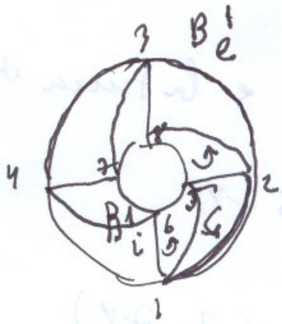


Si $C^k = \partial C^{k+1} \rightarrow$

$$\partial C^k = \partial\partial C^{k+1} = 0$$

Pero toda cadena cerrada no tiene forzosamente que ser cero.

El borde de B^1_e no contornea nada, es decir

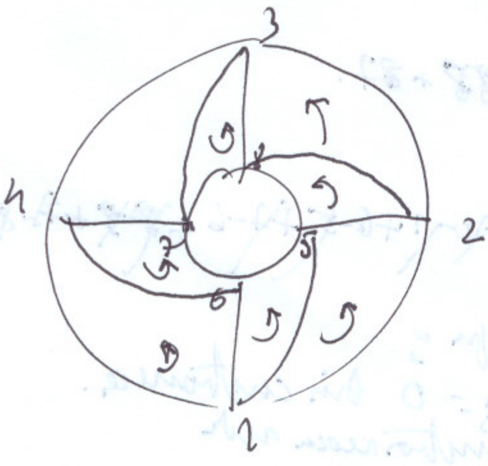


$$\left.\begin{array}{l} B^1_e \neq \partial B \\ B^1_i \neq \partial C \end{array}\right\}$$ pero $B^1_e + B^1_i$ si forman el borde del anillo circular (corona circular

C = ~~512 + 526 + 623 +~~

C^2 = ~~615 + 125 + 352 +~~ . $C^2 = 125 + 156 + 528 + 823 + 837 + 347 +$

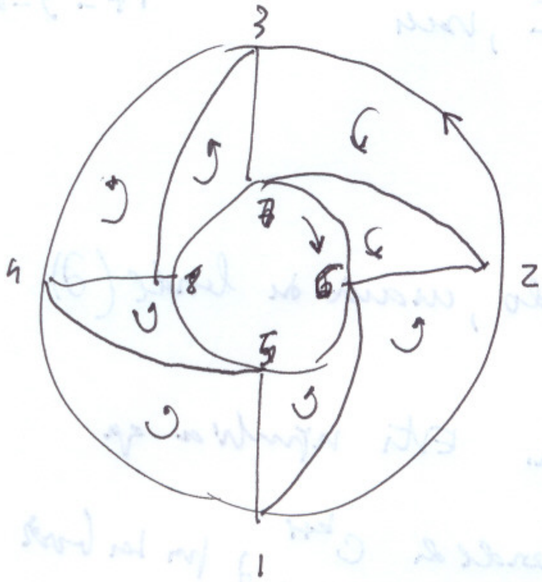
$+ 746 + 641$



$\cancel{25} - \cancel{15} + 12 + 56 - \cancel{16} + \cancel{15} + \cancel{28} - 58 + \cancel{52}$

$+ 23 - \cancel{83} + \cancel{82} + \cancel{37} - 87 + \cancel{83} + 47 - \cancel{37} + 39 +$

~~46 - 46~~ $\cancel{46} - 76 + \cancel{74} + 41 - \cancel{61} + \cancel{64}$



$165 + 126 + 762 + 723 + 873 + 348$

$+ 845 + 541$

$65 - 15 + 16$ $\quad 56 - 16 + 15$ $\quad 26 - 16 + 12$ $\quad 62 - 72 + 76$

$23 - 73 + 72$ $\quad 73 - 83 + 87$ $\quad 48 - 38 + 34$

$+ 45 - 85 + 84 + 44 - 54 + 51$ $\quad 41 - 51 + 54$

65

$165 \quad 126 \quad 627 \quad 237 \quad 873 \quad 348 \quad 845 \quad 541$

$65 - 15 + 16 \quad 26 - 16 + 12 \quad 27 - 67 + 62 \quad 37 - 27 + 23 \quad 73 - 83 + 87$

$+ 48 - 38 + 34 + 45 - 85 + 84 + 41 - 51 + 54$

En este ejemplo la cadena contorneadora es la suma de

B^1_e y B^1_i con $B^1_e = (1\,2\,3\,4)$ y $B^1_i = (5\,6\,7\,8)$

$B^1_e = (12 \quad 23 \quad 34 \quad 41)$ $\qquad B^1_i = (45 \quad 56 \quad 67 \quad 78)$

un cadena contorneadora $= B^1_e + B^1_i$.

En el ej, la cadena $C^2 = 165 + 126 + 627 + 723 + 173 + 348 +$

$+ 845 + 541$; La contorneadora es

$\partial C^2 = C^1 = 12 + 23 + 34 + 41 + 56 + 67 + \cancel{78} + 87$.

que es cerrada, $\partial C^1 = 2 - 1 + 3 - 2 + 4 - 3 + 1 - 4 + 6 - 5 + 7 - 6 + 8 - 7 + 7 - 8$

(salvo error). Pero cadenas cerradas, pues

$2 - 1 + 3 - 2 + 4 - 3 + 1 - 4 = 0$ sin contornear.

$B^1_e = 12 + 23 + 34 + 41$ no contorneadora a las anteriores.

Definiciones

Grupo r-cadena. $C_r(K)$ de un complejo simplicial K es un grupo abeliano libre generado por los r-simples $\sigma_{r,i}$ ($1 \leq i \leq I_r$) orientados en K.

$c \in C_r(K)$ es

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \qquad c_i \in \mathbb{Z}.$$

y la "cadena" c se puede sumar con la "cadena" c', dando

$$c + c' = \sum_i (c_i + c'_i)\, \sigma_{r,i}$$

Las cadenas tienen opuestas y cero-cadena, luego $C_r(K)$ con los elementos que la integran – las c-cadenas, forman un grupo abeliano libre de rango I_r,

$$C_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{I_r}$$

Mediante el operador boundary (contorno o borde), definido por ∂_r, que actúa sobre σ_r

$$\partial_r \sigma_r = \partial_r(p_0 p_1 \cdots p_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \cdots \hat{p_i} \cdots p_r)$$

donde $\wedge$ sobre p_i, nos dice que "falta" p_i en ese sumando. Para mejor entender, vemos que

$$\partial_2(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1)$$

$$\partial_3(p_0 p_1 p_2 p_3) = (p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2) \text{ etc.}$$

Además vale que

$$\partial c_r = \sum_i c_i \, \partial c_i$$

y

$$\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K).$$

Si K es un complejo simplicial-n, podemos escribir

Nakahara p 72. **A incluir como 21 bis** 17-3-07. C

Boundary operator.

Se define por

$$\partial_r \sigma_r \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \ldots \hat{p}_i \ldots p_r)$$

donde $\hat{p}_i$ quiere decir, que p_i no figura en ese término.

Nakahara no justifica esta definición, que considerando a ∂_r como una derivación, no tiene nada de extraño, pero todavía queda por saber cómo explicar el cambio de signo que supone $(-1)^i$.

Para verlo claro, considero el caso simple de

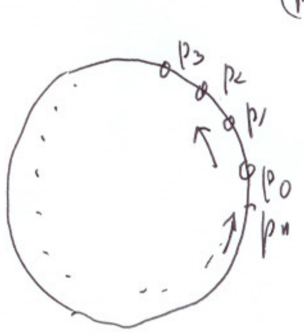
$$\partial_2(p_0p_1p_2) = (p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)$$

∂ $$\partial_3(p_0p_1p_2p_3) = (p_1p_2p_3) - (p_0p_2p_3) + (p_0p_1p_3) - (p_0p_1p_2)$$

donde he aplicado la regla de la Definición.

La explicación de los signos $\pm$ está en que $(p_0 p \ldots p_n)$ tiene cierta orientación cíclica y realmente, al ir "borrando" cada uno de los elementos de σ_n, nos queda

$$(p_1p_2\ldots p_n) \quad (p_0p_2\ldots p_n) \quad (p_0p_1p_3\ldots p_n)\ldots(p_0p_1\ldots p_{n-1})$$



y al tachar p_1 nos queda $p_2p_3\ldots p_n p_0$, luego en $p_0\, p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$, tenemos que ir llevando p_1 $p_2p_3\ldots p_n$ al primer lugar, después de perder un punto, así de $p_0p_1p_2\, p_n \to p_1p_2\ldots p_n$ pero al $p_0p_1p_2\ldots p_n$ al tachar p_1 el p_0 ocupa su lugar y queda $-p_0p_2\ldots p_n$; etc.

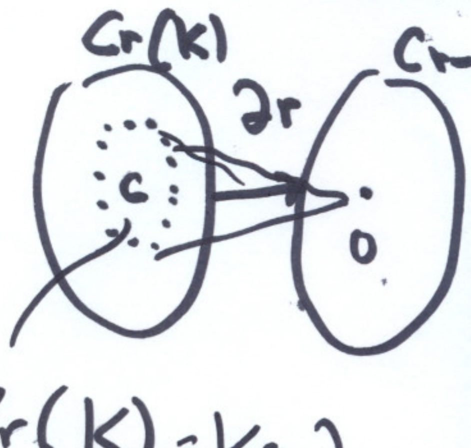
$$0 \xrightarrow{i} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

donde i es una inclusión; esta sucesión se llama el complejo cadena asociado con K, denotado $C(K)$. Vale la pena considerar la imagen y ker de los homomorfismos ∂_r.

Def. Si $c \in C_r(K)$ satisface a

$$\partial_r c = 0$$

entonces c es un r-ciclo.
Los r-ciclos forman un subgrupo $Z_r(K)$ de $C_r(K)$ que se llama el grupo de los r-ciclos.
Como vemos $Z_r(K) = \ker \partial_r$. Si K es un ciclo complejo n-dimensional y $c \in C_r(K)$, en el caso de que haya un $d \in C_{r+1}(K)$ tal que



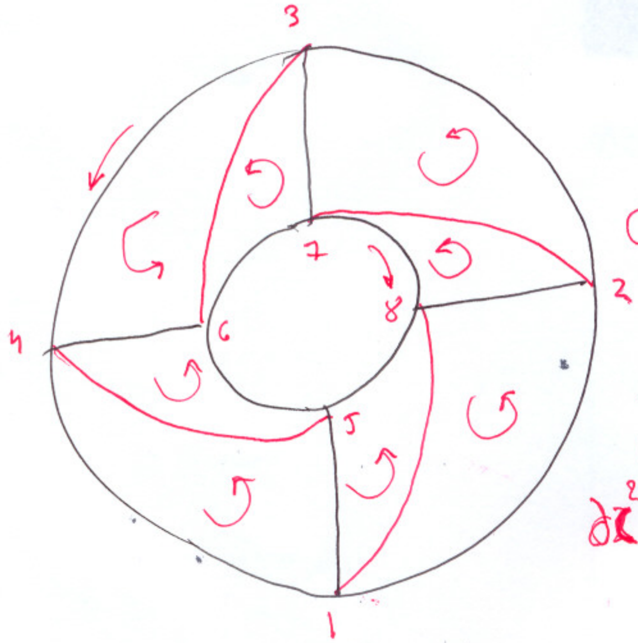
$Z_r(K) = \ker \partial_r$

$$c = \partial_{r+1} d$$

entonces c es llamado un r-boundary.
El conjunto de r-boundaries $B_r(K)$

es un subgrupo de $C_r(K)$ y se llama el grupo r-boundary. Observar que $B_r(K) = \operatorname{im} \partial_{r+1}$ (Nota: $B_n(K) = 0$).

Ej. tomado de Seifert-Threlfall p 76. La cadena C^2 está formada por los ocho triángulos



$C^2 = 185 + 128 + 827 + 237 + 736 + 346 + 645 + 541$

y la contorneadura es

$\partial^2 C^2 = (85 - 15 + 18) + (28 - 18 + 12) + (27 - 87 + 82) + (37 - 27 + 23) + (36 - 76 + 73) + (46 - 36 + 34) + (45 - 65 + 64) + (41 - 51 + 54)$

que reduciendo vale

crupo contorn vale

$\partial C^2 = 85 + 12 + 87 + 23 + 76 + 34 + 65 + 41$

que son $B^1_i + B^1_e$. Vemos que la $B^1_e + B^1_i$ es contorneadura de C^2 y su borde es cerrado, quiere esto decir que $\partial C^1 = 0$, como vemos fácilmente.

Pero también B^1_e, B^1_i son cerrados, pues sus bordes respectivos

$\partial B^1_e = \partial(12 + 23 + 34 + 41) = 2 - 1 + 3 - 2 + 4 - 3 + 1 - 4 = 0$

$\partial B^1_i = \partial(56 + 67 + 78 + 85) = 6 - 5 + 7 - 6 + 8 - 7 + 5 - 8 = 0$ c.q.d.

y ni B^1_e, ni B^1_i contornean nada.

"que es el contorno de algo"

Si bien toda cadena contorneadora sobre K^n es cerrada, no por ello, toda cadena cerrada es contorneadora.

Cuando una cadena-k cerrada, sea el contorno de una cadena (k+1) diremos que la cadena-k es nulhomóloga y pondremos

$$U^k \sim 0.$$

Si dos cadenas, cerradas o no, son homólogas, cuando su diferencia es una cadena nulhomóloga, es decir,

$$U^k \sim V^k \text{ cuando } U^k - V^k \sim 0$$

La relación

$$U^k \sim V^k$$

recibe el nombre de Homología.

Designamos por

1) $C_n(K)$ una r-cadena de un complejo simplicial K.

2) los símplices son $\sigma_{r,i}$, $1 \le i \le I$, y ~~r~~ r es el orden del simplice

Un elemento $c \in C_n(K)$ tiene la forma

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

3) Cuando $c \in C_r(K)$ satisface a

$$\partial_r c = 0$$

decimos que c es un r-ciclo. El conjunto de r-ciclos es $Z_r(K) = \ker \partial_r$

4) Si $d \in C_{r+1}(K)$ y

$$c = \partial_{r+1} d$$

entonces c es una r-boundary. El conjunto de las r-boundaries $B_r(K)$ es un subgrupo de $C_r(K)$; además vale que

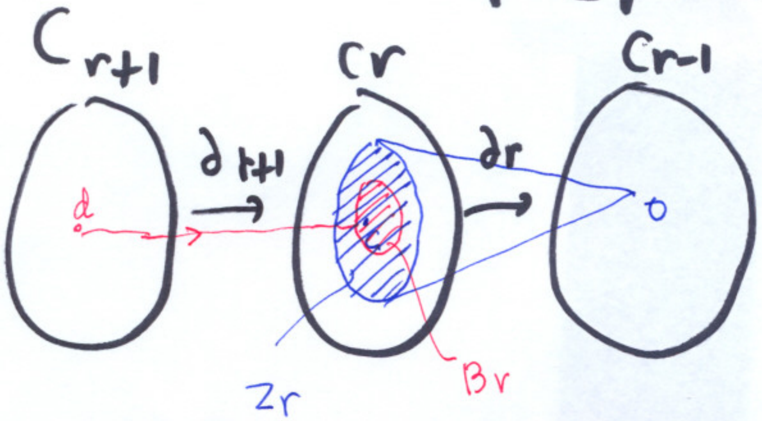
$$B_r(K) = \operatorname{im} \partial_{r+1}$$

5) El r-dimensional grupo de homología de K, denotado por $H_r(K)$ es

$$H_r(K) = Z_r(K) / B_r(K).$$

Los elementos h_r de $H_r(K)$ son las clases de equivalencia $[z_r]$ definidas por la relación z_r^1 es equivalente a z_r^2 si

$$z_r^1 - z_r^2 \in B_r(K)$$



Los elementos $c \in C_r : \partial_r c = 0$ forman un subgrupo de $C_r(K)$; se representan por $Z_r(K)$. En $C_{r+1}(K)$, puede haber elementos $d : \partial_{r+1} d = c$. Entonces entre c que sean bordes de los d, hacen un subgrupo B_r de Z_r, y forman la $\mathrm{Im}\, \partial_{r+1} = B_r$. Al obtener el grupo cociente $H_r = Z_r / B_r$, estamos eliminando de los ciclos de Z_r, aquellos que son bordes de elementos de C_{r+1}; luego los que nos quedan, son ciclos que no tienen bordes, es decir "holes".

El r-ésimo número de Betti $b_r(K)$ es $\cong \dim H_r(K; R)$

De otra manera, $b_r(K)$ es el rango de la parte abeliana libre de $H_r(K, Z)$.

Teorema fundamental de los grupos abelianos

Sea G un grupo finitamente generado y abeliano (no necesariamente libre), con m generadores. Entonces G es isomorfo a la suma directa de grupos cíclicos

$$G \cong \underbrace{Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z}_{r} \oplus Z_{k} \oplus \cdots \oplus Z_{p}$$

con $m = r + p$

Partimos de $G/\ker f \cong \operatorname{im} f$ y tomamos $x_1 \dots x_m$ de forma que

$$\ker f \cong k_1 Z \oplus \cdots \oplus k_p Z$$

para finalmente llegar a

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m} / \ker f \cong$$ 23-3-07 (28

$$\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m} / k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p\mathbb{Z} \cong$$

$$\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m-p} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}}_{p}.$$

Se ha utilizado el lema 3.2

G es abeliano de rango r y libre, y $H \neq \phi$ es un subgrupo de G.

Podemos escoger p generadores $x_1 \ldots x_p$ de entre los r de G de forma que

$$k_1x_1 + \cdots + k_p x_p$$

generan H. Así $H \cong k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus k_p\mathbb{Z}$ y H es de rango p.