24-3-07. C1

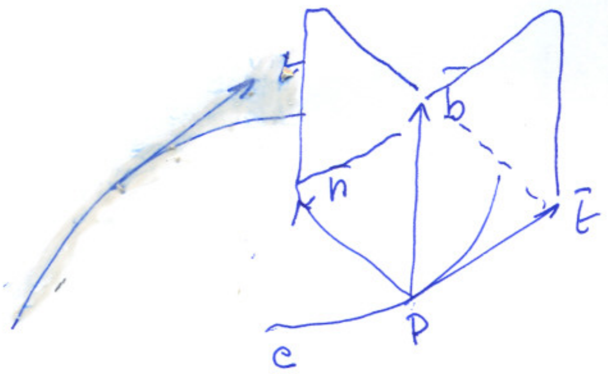
Cuarta Conferencia
Geometría Riemanniana.

4.1 Las fórmulas de Frenet.

En las curvas alabeadas se considera un triedro ortogonal en cada punto de la curva, que llamamos triedro de Frenet.

Sus ejes son: 1° el eje según la tangente a la curva. 2° El eje según la normal a la curva y 3° el eje perpendicular a los dos anteriores y que forma con ellos un triedro ortogonal a derecha.

El resultado importante de esta construcción está en que



la tangente a la curva, $\bar{t}$, la normal $\bar{n}$, la binormal $\bar{b}$ (vectores unitarios) se relacionan por las fórmulas 24-3-07 (2

$$\dot{\bar{t}} = k\bar{n}$$

$$(1) \quad \dot{\bar{n}} = -k\bar{t} + \tau\bar{b}$$

$$\dot{\bar{b}} = -\tau\bar{n}$$

donde k es curvatura, y τ, torsión.

El tensor fundamental:

4.2. Si consideramos a la curva C, situada sobre una superficie, cabe preguntarnos, cuando la normal a la superficie en un punto P, común con la curva, coincide con la normal a la curva.

Llamando $\bar{r}$ al vector de posición de un punto P de la superficie, y u, v a las paramétricas tenemos

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2} du^2 = \bar{r}_1 du^1 + \bar{r}_2 du^2$$

siendo $\bar{r}^i \cdot \bar{r}^j = g_{ij}$, $\bar{r}_i = g_{ij} \bar{r}^j$

El elemento de arco ds vale

24-3-07. (3

$$ds^2 = \bar{dr} \cdot \bar{dr} = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

El determinante $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$

4.3 Curvatura de las superficies.

Como sabemos

$$\bar{r}_i \cdot \bar{r}_i = g_{ii} \Rightarrow |\bar{r}_i| = \sqrt{g_{ii}} = g_i$$

y el producto vectorial de $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ es:

$$|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2| = g_1 g_2 \operatorname{sen}\phi = \sqrt{g}$$

Ahora podemos definir, el vector normal unitario en un punto P de una superficie, poniendo

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{\sqrt{g}} \quad ; \bar{n} \text{ unitario}$$

$\sqrt{g}$ = módulo del numerador

Recordando las (1)(folio 2), podemos decir

$$k\,\bar{n}\cdot\bar{n} = k = \dot{\bar{t}}\cdot\bar{n}$$

que por ser $\bar{t} = \frac{d}{ds}\sum a^i \bar{r}_i$, nos da

$$k = \sum \left(a^i \frac{d}{ds}\bar{r}_i\right)\cdot\bar{n} = \sum\sum a^i a^j\, \bar{r}_{ij}\cdot\bar{n}$$

que al introducir $b_{ij} = \bar{r}_{ij} \cdot \bar{n}$, nos da la curvatura normal, en la dirección $\sum a^i \bar{r}_i$

$$k = \sum\sum b_{ij}\, a^i a^j \qquad (2)$$

Curvaturas principales

La (2) se puede reescribir, diciendo

$$k \sum\sum g_{ij}\, a^i a^j = \sum\sum b_{ij}\, a^i a^j \Rightarrow$$

$$= \sum\sum \left(b_{ij} - k g_{ij} \right) a^i a^j = 0$$

Si recordamos que

$$\sum\sum g^{ij} a_i a_j = \sum a_i a^i = \sum\sum g_{ij}\, a^i a^j = 1.$$

y hemos reducido todo a un problema de valores propios; obtenemos k_1, k_2 que dan la curvatura máxima y mínima. No interesa seguir con este tema, y para terminar este punto, diremos que el producto a $k_1 k_2$ es la curvatura total o de Gauss y la suma $k_1 + k_2$ es la curvatura media

4.4. Líneas geodésicas:

Cuando en la curva c trazada sobre la superficie S, se da la particularidad de que coincide la normal a la superficie, con la normal a la curva, decimos que c es una geodésica. La ecuación de las geodésicas se obtiene partiendo de Frenet, ya que este nos dice que

$$(3) \quad k\bar{n} = \dot{\bar{t}} = \frac{d}{ds}\sum \dot{u}^i \bar{r}_i = \sum\sum \dot{u}^i \dot{u}^j \bar{r}_{ij} + \sum \ddot{u}^i \bar{r}_i$$

y en nuestro caso $\bar{n}$, normal a la curva y $\bar{N}$ normal a la superficie han de coincidir, luego $\bar{n} = \bar{N} \perp (\bar{r}^k)$ $\left(\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} \right)$ y dado que $\bar{r}_i \cdot \bar{r}^k = \delta_i^k$, $\bar{r}_{ij} \cdot \bar{r}^k = \Gamma_{ij}^k$, la (3) será

$$\left(\sum \ddot{u}^i \bar{r}_i + \sum\sum \dot{u}^i \dot{u}^j \bar{r}_{ij} \right) \cdot \bar{r}_k = 0$$

lo cual equivale a

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum\sum \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0 \quad \text{(geodésica)}$$

Resumiendo lo que acabamos de ver, decimos que: cuando las normales a la superficie y a la curva coinciden es señal de que nos movemos sobre una geodésica. Para una esfera las geodésicas son los círculos máximos (mal dicho, porque no son tales círculos, sino circunferencias), la medida de distancia y es menor, entre sus puntos más.

Como la curvatura normal a la esfera y a la curva están sobre el mismo eje, coinciden y no hay curvatura tangencial o geodésica. El ejemplo de Hilbert Cohn-Vossen, con el carrito, ilustra lo que decimos con toda claridad.

La derivada covariante, que aparece como por encanto, en casi todas partes, no es otra cosa que despreciar la derivada ordinaria del vector tangente a la curva de su componente normal a la superficie. Esta es la conexión de Levi-Civita.

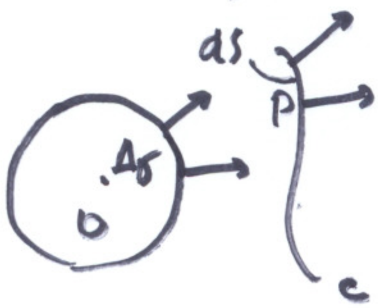
× × ×

Pasamos a ocuparnos de lo que significa el tensor de Riemann-Christoffel.

4.4. Tensor de R-C.

La curvatura. Curvas planas y superficies

Para una curva plana, tomamos como medida de su curvatura, la divergencia de sus normales.



Por el punto P de la curva c, trazamos una normal a la curva, y por el punto O de la circunferencia de radio 1, trazamos un vector equipolente. El cociente

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \quad \text{cuando } \Delta s \to 0$$

se llama la curvatura de c en el punto P.

Cuando consideramos una superficie necesitamos el ángulo sólido, que juega el mismo papel que hacía antes $\Delta\sigma$.

Def. El ángulo sólido es un cono de vértice A y su medida es la relación que [illegible] existe, entre el área que intercepta sobre una esfera de radio unidad, un cono de vértice unidad con generatrices las del cono dado, y el área de la esfera unidad.

Así para un octante, el ángulo sólido vale

$$\frac{4\pi}{8} = \frac{\text{área esfera unidad}}{8 \text{ octantes}} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

24-3-07. (8

Ya sabemos la ecuación de una geodésica. Ahora vamos a obtener la derivada covariante, utilizando las ecuaciones conocidas (folio 5) y el requerimiento de que la derivada del producto

$$(1) \quad A_\mu \frac{dx_\mu}{ds} \text{ ha de ser invariante}$$

Entonces derivamos respecto s la (1) y tendremos

$$\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{ds} + A_\mu \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \text{ ha de ser invariante a}$$

lo largo de una geodésica. Sustituyendo $A_\mu \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}$ por

$$A_\alpha \{\mu\nu,\alpha\} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

resulta

$$\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - A_\alpha\{\mu\nu,\alpha\}\right) \text{ invariante}$$

y dado que $\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$ es un tensor ~~covariante~~ contravariante de segundo orden, el factor que le acompaña ha de ser un tensor covariante de 2º orden para que el producto sea invariante.

Con esto ya tenemos dos cosas importantes.

A) La ecuación de las líneas geodésicas

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \{\mu\nu,\alpha\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

B) Las ecuaciones de las derivadas covariantes de A_μ

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu,\alpha\} A_\alpha$$

El significado geométrico de las derivadas covariantes no es otra que, la derivada direccional según la normal a la superficie

Para las geodésicas, significa que la normal a la superficie, y la normal a la curva coinciden.

Nos falta por decir algo sobre el desplazamiento paralelo de un vector.

En realidad, se vuelve a suponer que

(10 (25-3-07

la superficie está inmersa en un espacio de $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensiones (la superficie es de n-dimensiones) y en este espacio propagamos el vector paralelamente a sí mismo del punto P al P' sobre la superficie. Proyectamos el vector desplazado sobre el plano tangente a la superficie en el punto P' y el vector resultante es el paralelo (Levi-Civita) del vector original

A partir de la fórmula

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu,\alpha\} A_\alpha$$

que nos da el tensor $A_{\mu\nu}$ como derivada covariante del vector A_μ, pasamos a derivar sucesivamente para llegar a

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma,\alpha\} A_{\alpha\nu} - \{\nu\sigma,\alpha\} A_{\mu\alpha} =$$

$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\nu} - \{\mu\nu,\alpha\} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma,\alpha\} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} -$$

$$- \{\nu\sigma,\alpha\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} + \{\nu\sigma,\alpha\}\{\mu\alpha,\epsilon\} A_\epsilon$$

y restamos las $A_{\mu\nu\sigma}$ y las $A_{\mu\sigma\nu}$ da

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = A_\epsilon R^\epsilon_{\mu\nu\sigma}$$

con

$$R^\epsilon_{\mu\nu\sigma} = \{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\nu, \epsilon\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\sigma, \epsilon\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \epsilon\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\{\mu\nu, \epsilon\}$$

que es el conocido tensor a Riemann-Christoffel derivado solo a partir de las $g_{\mu\nu}$ y por eso es un tensor fundamental, el tensor de curvatura

Contrayéndolo obtenemos un tensor de 2º orden

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^m_{\alpha m} - \Gamma^m_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu m} \equiv \text{Ricci-Tensor.}$$

y volviendo a contraer, queda

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad \text{escalar de curvatura}$$

Pero podemos preguntarnos ¿porqué se hacen esas derivadas covariantes y después se restan, para llegar a la curvatura?

Respuesta:

25-3-07 (12

Cuando el vector tangente a una geodésica se mueve sobre ésta paralelamente, sabemos que no deja de ser tangente y sigue (no hay curvatura tangencial). Así que durante el desplazamiento paralelo de un vector sobre una geodésica las componentes de éste no varían.

Pero el desplazamiento paralelo de un vector a lo largo de caminos diferentes, que empiezan en el mismo punto, da resultados diferentes. (como dice la Fig 1.

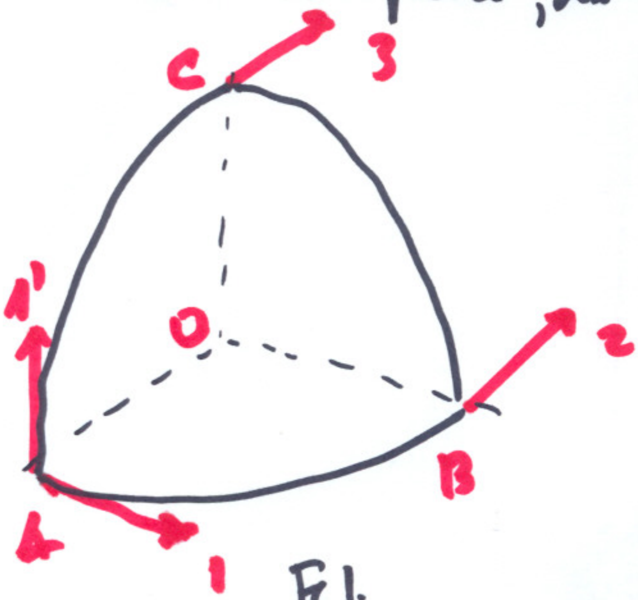


Fig 1.

El 2º término en la ecuación de la Derivada covariante, es decir, después de integrar

$$\oint \Gamma^i_{kl} A_i \, dx^l$$

nos da la variación del vector A_i después de un desplazamiento paralelo a lo largo de un contorno cerrado. Para esta integral curvilínea se puede transformar aplicando el teorema de Stokes, en una integral a hipersuperficie, tal que

Stokes $\oint A_i dx_i = \int df_{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\int df_{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)$

$$\int \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km} A_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl} A_i}{\partial x^m}\right) df^{lm}$$

Landau-Lifshitz "Classical..." p22.

$$= \int \left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right] df^{lm}$$

La expresión dentro del corchete se escribe

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

que es el Tensor de Riemann-Christoffel.

Nota: los elementos Γ^i_{km}, etc no son otra cosa que los llamados símbolos de Christoffel. y la definición más inmediata de ellos, la encuentro en Coxeter "Fundaments of Geometry" p 412.

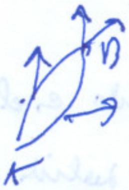
$$\Gamma_{ij,k} = \bar{r}_{ij}\cdot\bar{r}_k \qquad \Gamma^k_{ij} = \bar{r}_{ij}\cdot\bar{r}^k$$

Internet. Riemannian Curvature 26-3-07.

2ª entrada.

Covariant derivatives and Riemannian curvature tensors

El significado geométrico de la conexión Levi-Civita con las componentes Γ^a_{bc} es que da una forma de transportar vectores a lo largo de una curva, que da valores finales diferentes al llegar al mismo punto final, a través de distintos caminos.



El vector $U = u^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ se transporta a lo largo de la curva C con tangente $\dot{C} = \dot{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ si la derivada covariante de U respecto a $\dot{C}$ denotada por $\nabla_{\dot{C}} U$ de componentes

$$(\nabla_{\dot{C}} U)^a = \dot{x}^c \left(\frac{\partial u^a}{\partial x^c} + \Gamma^a_{bc} u^b\right) = \dot{u}^a + \Gamma^a_{bc} u^b \dot{x}^c$$

es nula. En este caso se dice que U es paralela a lo largo de C. Es evidente que si C es una geodesica, entonces $\nabla_{\dot{C}}\dot{C} = 0$ y $\dot{C}$ es auto-paralela.

Aunque la conexión Levi-Civita de componentes Γ^a_{b} no se transforma como un tensor bajo un cambio de coordenadas, la curvatura Riemanniana

$$R^a_{bcd} = \frac{\partial}{\partial x^c}\Gamma^a_{bd} - \frac{\partial}{\partial x^d}\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}$$

es un tensor.

Contrayendo el Tensor de curvatura riemanniana se obtienen nuevos tensores. Uno muy importante

→ el tensor de Ricci:

$$\text{Ricci} = R_{ab}\, dx^a \otimes dx^b$$

Planet Math 6ª entrada de Levi-Civita connection

recuerda que $g_{el}\Gamma^l{}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right)$

Solid angle $\Omega = \frac{kS}{\pi R^2}$, si $k=1$ el angulo solido es el steradian. El angulo solido de una esfera medido en su centro es 4π steradian. El angulo recto de un cubo desde su centro es $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.