Demostración de Hamilton-Perelman de la Conjetura de Poincaré

Francisco R. Villatoro
Dept. Lenguajes y Ciencias de la Computación
E.T.S.Ingenieros Industriales
Universidad de Málaga

Málaga, 16 de abril de 2007

LENGUAJES Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

E.T.S. Ingenieros Industriales

¿Por qué un profesor de Métodos Numéricos en una Escuela de Ingeniería Industrial se atreve a impartir unas conferencias sobre la reciente Demostración de la Conjetura de Poincaré?

La conjetura de Poincaré ha sido considerado el avance científico más importante del año 2006 por la revista Science.

Science es una de las revistas internacionales de mayor prestigio (la norteamericana de mayor prestigio en Ciencia en general) que en su último número de diciembre selecciona todos los años los 10 avances más importantes de cada año, de los que se hacen eco periódicos de divulgación general como El Pais, en España.

La importancia de la demostración de la conjetura de Poincaré no está en la "verdad" de la conjetura como tal, si no en las técnicas y herramientas novedosas que han tenido que ser desarrolladas para poder demostrarla. Estas técnicas se añaden al "cajón de sastre" (toolbox) de todo matemático. Este ciclo de conferencias se centra por tanto en estas herramientas, más que en el significado y la utilidad práctica de la propia conjetura (ahora teorema) de Poincaré.

Serie de conferencias

1. **Demostración de la conjetura**
   - Lunes 16 de abril (10:30)
2. **Flujo de Ricci-Hamilton**
   - Viernes 20 de abril (10:00)
3. **Solitones de Ricci y singularidades**
   - Lunes 23 de abril (10:30)
4. **Aportaciones de Perelman**
   - Viernes 27 de abril (10:00)

Illustration by Robert Neubecker.

El ciclo de conferencias que hemos organizado Rafael Miranda y yo se ha dividido en dos partes con cuatro conferencias cada uno. Rafael ha introducido en las 4 charlas anteriores los fundamentos de topología y geometría necesarios para la segunda parte en la que nos centraremos en los resultados más recientes.

Demostración de la conjetura

- Topología, geometría y análisis geométrico
- ¿Qué es la conjetura de Poincaré?
- La historia en el s. XX de la conjetura
- El programa de Hamilton-Yau
- Ideas sobre la demostración de Grigori Perelman
- Breve historia de la demostración

Los contenidos de esta charla son los siguientes: Presentaremos algunas ideas que resumen lo que ha explicado Rafael (Miranda) en sus charlas anteriores. Qué es la topología, qué es la geometría riemanniana, y qué es el análisis geométrico la rama de la matemática utilizada para la demostración, que combina ecuaciones en derivadas parciales con conceptos de geometría.

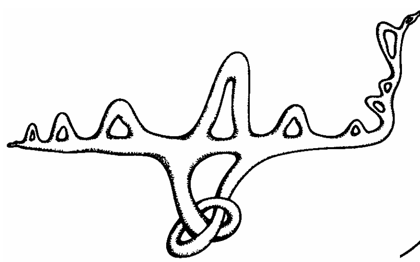
La demostración de Perelman es para la conjetura en dimensión 3, que corresponde a la formulación original de la conjetura de Poincaré. Presentaremos también algunas ideas sobre cómo se ha demostrado en 4 y más dimensiones durante el s. XX y cómo la conjetura ha sido el "motor" de la Topología durante este siglo.

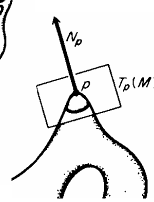
Finalmente, expondremos brevemente las ideas en las que se basa la demostración (que contaremos en más detalle en las próximas tres charlas): la idea fundamental del programa de Hamilton (y Yau) para demostrar la conjetura de geometrización de Thurston y con ella la conjetura de Poincaré. Resumiremos los problemas más importantes que dejó Hamilton sin resolver y mencionaremos algunas de las nuevas ideas y técnicas aportadas por Perelman.

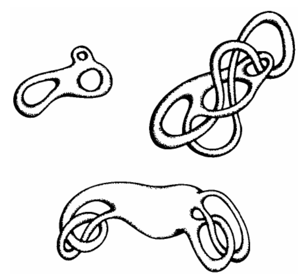
Finalmente, contaremos brevemente la historia de la demostración y las dificultades que han surgido en los últimos años a la hora de entender el trabajo de Perelman.

Topología

- Variedad topológica
  - (hiper)superficie localmente euclídea
  - Todo punto tiene (hiper)plano tangente.
- ¿Cuándo dos variedades son homeomorfas (equivalentes)?
  - Existe transformación continua con inversa continua entre ellas





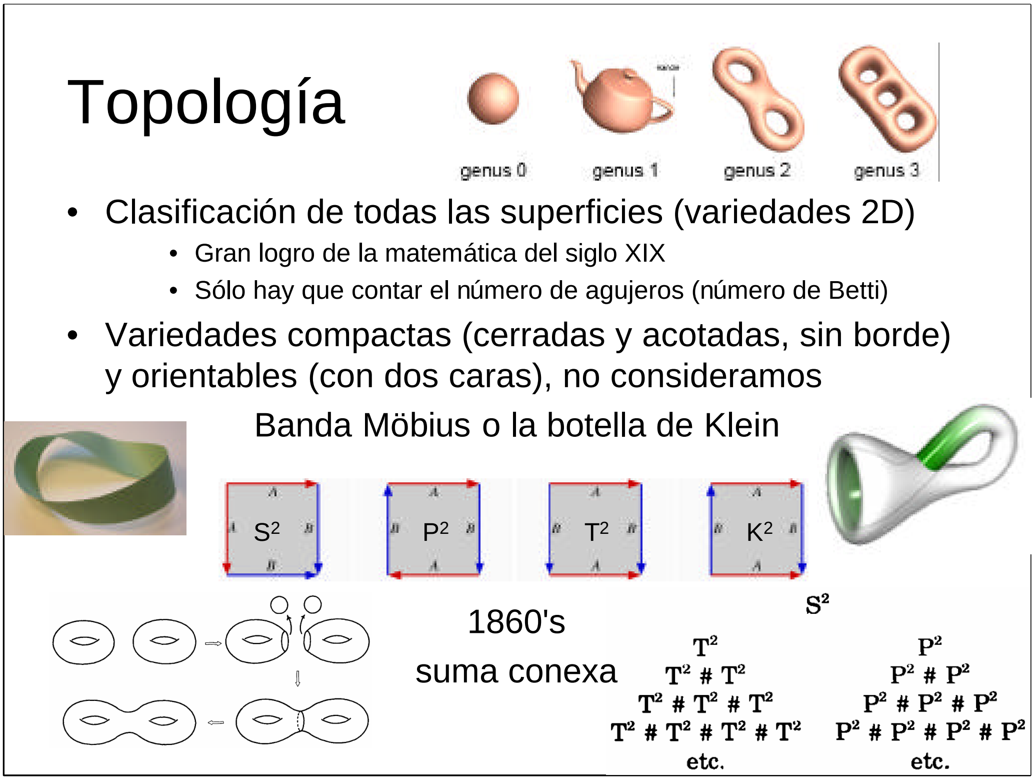


¿Qué es la topología? La “geometría de la plastilina”, las propiedades invariantes en una superficie (o hipersuperficie) ante transformaciones continuas. El chiste más famoso sobre un topólogo es que en el desayuno no es capaz de distinguir entre la taza y el donut.

Nos interesan las variedades topológicas, (hiper)superficies que son localmente planas, en todo punto tienen un (hiper)plano tangente. Una variedad de este tipo puede ser extremadamente complicada (tanto como nuestra imaginación permita).

Uno de los objetivos fundamentales de la topología es entender estas variedades y clasificarlas, conocer todos los tipos que existen.

Para ello es necesario definir cuándo dos variedades son la misma, son equivalentes, es decir, son homeomorfas cuando existe una transformación continua con inversa continua de una en la otra. Una pregunta, ¿son equivalentes las tres variedades de la derecha? La respuesta es sí, si lo piensas un poco verás el porqué.



En el siglo XIX se logró clasificar todas las variedades en dos dimensiones (superficies como la esfera que se pueden sumergir en 3 dimensiones o como la botella de Klein que requieren 4 dimensiones).

Para un topólogo en 1860s todas las superficies son homeomorfas a la esfera, a una suma conecta de toros (esferas con asas) o a una suma conexa de planos proyectivos.

En esta conferencia nos interesan las variedades compactas (cerradas y acotadas). No nos interesan las superficies no compactas como el plano euclídeo. Además, sólo nos interesan las variedades orientables, sin entrar en detalles, son no orientables variedades como la cinta de Möbius o la botella de Klein.

La clasificación de la variedades compactas y orientables en dos dimensiones se basa en el número de agujeros que tiene la superficie (técnicamente, su número de Betti).

La cuestión fundamental de la topología es : dada una variedad compacta y orientable, ¿es homeomorfa a una esfera? Esta cuestión fue resuelta en el s. XIX por varios autores llegando a la conclusión que lo será si no tiene ningún agujero.

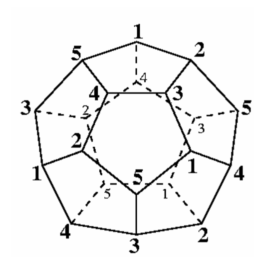
Conjetura de Poincaré

- Cuestión fundamental de la topología (de variedades)

  Dada una variedad n-dimensional cualquiera, ¿es homeomorfa a la esfera? ¿Cómo puedo saberlo?
- 1900 – "teorema erróneo" de Poincaré

Tout polyèdre qui a tous ses nombres de Betti égaux à **1** *et tous ses tableaux T_q bilatères est simplement connexe, c'est-à-dire homéomorphe à l'hypersphère.*

If a closed 3-dimensional manifold has the homology of the sphere S^3, then it is necessarily homeomorphic to S^3.



- 1904 – encuentra un contraejemplo: "esfera homológica de Poincaré"

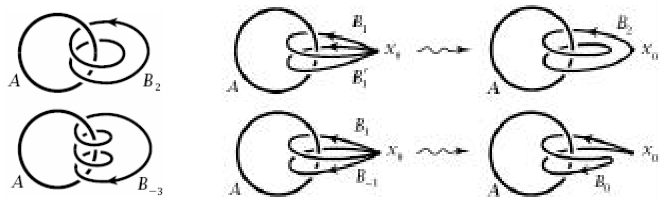
La cuestión que estudió Poincaré a principios de s. XX fue qué pasa en 3 dimensiones, es decir, para variedades tridimensionales (compactas y no orientables), que se pueden sumergir en un espacio euclídeo de 4 dimensiones.

Poincaré afirmó que las esferas estaban caracterizadas por sus grupos de homología simplicial. Sin entrar en detalles, estos grupos indican cómo se puede triangular la variedad, es decir, seleccionados un conjunto de puntos en la variedad cómo se pueden unir estos por "líneas" que los conecten. Poincaré creyó que era capaz de demostrarlo. Sin embargo, no fue capaz, porque no era verdad.

Poincaré introdujo la teoría de la homotopía y el concepto de grupo fundamental (denotado pi en su honor) y encontró un contraejemplo, una variedad "homológicamente" equivalente a la 3-esfera pero cuyo grupo fundamental es finito, pero no trivial, como el de la esfera. En la figura hay que identificar las caras opuestas de forma que coincidan los nodos con el mismo número.

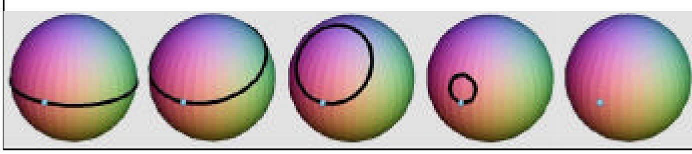
Conjetura de Poincaré

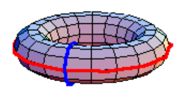
- Homotopía: grupo fundamental



Grupo Abeliano

  - Grupo fundamental (finito) y trivial : Esfera
  - Variedad simplemente conexa





Veamos la idea del grupo fundamental.

El grupo fundamental estudia cómo están "entrelazadas" curvas cerradas dentro de la variedad. Tomando un sentido para el recorrido del lazo podemos definir una suma de lazos que cumple las propiedades de un grupo (abeliano o conmutativo).

La esfera tiene un grupo fundamental trivial, es simplemente conexa, ya que todo lazo (curva) cerrado(a) sobre dicha variedad se puede contraer a un punto. Como vemos abajo, en la esfera eso siempre es posible, pero en el toro no es así. El toro no tiene un grupo fundamental trivial.

Conjetura de Poincaré

- La esfera homológica de Poincaré no es simplemente conexa (tiene grupo fundamental finito pero no trivial):

  Conjetura: es el único ejemplo que existe

- Formulación correcta de la conjetura 1904

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

If a closed 3-dimensional manifold has trivial fundamental group, must it be homeomorphic to the 3-sphere?

La esfera homológica de Poincaré es el único ejemplo conocido de una variedad con grupo fundamental finito, pero no trivial. Se ha conjeturado que es la única.

En 1904 Poincaré presentó la formulación correcta de la conjetura. La esfera es la única variedad que tiene grupo fundamental trivial, o sea es simplemente conexa. Por tanto, toda variedad que cumpla dicha condición debe ser homeomorfa a ella.

Sorprendentemente, esta conjetura ha sido extremadamente difícil de demostrar. De hecho ha sido el motor de la topología (algebraica) durante todo el siglo XX y la mayoría de los grandes avances han estado relacionados con el descubrimiento de variedades que "casi" son esferas, pero que no lo son, en el marco de demostraciones "fallidas" de la conjetura.

De hecho, el caso de dimensión 3 ha resultado ser el más difícil. Los ataques topológicos a la conjetura de Poincaré han sido todos infructuosos y la demostración que finalmente ha obtenido Perelman ha sido mediante herramientas geométricas, es decir, introduciendo una “geometría” en la variedad.

CP en dimensión alta

- Stephen Smale (ca. 1960) la demostró para n>4

  (primero en n=7, luego n=6, 5, y finalmente n>=5)

  Medalla Fields 1966

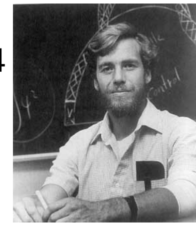
  (Wallace, Zeeman, Stallings)
- Idea: "desanudar nudos" en n>=5 en variedades simplemente conexas

- Siempre posible con un pequeña perturbación gracias a las dimensiones adicionales. Muy "duro" en n=5. No funciona en n<5, no hay "dimensiones" suficientes.

El primer gran éxito en la demostración de la conjetura de Poincaré fue debido a Smale en dimensión 7. Imaginemos una transformación continua de una circunferencia en un nudo. En dimensión 7 siempre existe una pequeña perturbación en una dimensión adecuada que permite “desanudar” el nudo de forma tal que éste contenga un “círculo” en su interior. Este resultado permitó demostrar la conjetura de Poincaré en dimensión 7. Stallings lo demostró en dimensión 6 y Wallace en dimensión 5 (el caso de dimensión 5 es especialmente difícil). Finalmente, Smale extendió su prueba a dimensión mayor de 4 y recibió la medalla Fields por ello.

No entraremos en más detalles, sólo deciros que la demostración de Smale no es aplicable en dimensión 4 y 3 porque no hay suficientes dimensiones como para que el “truco” de la perturbación funcione.

CP en dimensión alta



- Michael Freedman (1982) la demostró para n=4

  Medalla Fields 1986
- Idea: aprovechar que en n=4, las variedades

  DIFF = PL ≠ TOP
- Utilizó desarrollos previos para el invariante de Kirby-Siebenmann que caracteriza las variedades TOP que no están en PL
- Es una demostración muy técnica y difícil de explicar
- Desafortunadamente, para n=3, DIFF = PL = TOP

En dimensión cuatro, la demostración de la conjetura la obtuvo Freedman en 1982, que se concentró en clasificar las variedades difíciles para la conjetura, todas las variedades que admitiendo una estructura lineal a trozos (PL) no admiten una estructura suave (DIFF). Logró clasificar todas las variedades topológicas cerradas simplemente conexas en 4 dimensiones. Para ello utilizó dos invariantes, su grupo de cohomología H2 (que es abeliano libre) y el invariante de Kirby-Siebenmann que es cero si la variedad admite una estructura DIFF y uno cuando no la admite (sólo PL). La demostración es muy complicada y nos llevaría muy lejos entrar en los detalles, baste decir que se basa en que PL no es igual a DIFF y por tanto no es aplicable en dimensión 3 donde PL=DIFF.

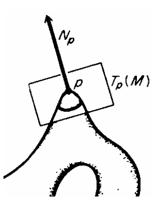
Geometrizar una variedad

- Espacio euclídeo: longitudes y ángulos medidos mediante un producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n. \qquad \|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}. \qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right)$$

- Un producto escalar general : B es matriz simétrica

$$\mathbf{u}^T\mathbf{B}\mathbf{u}=\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}u^iu^j$$



Definition 1.1. Let M be an n-dimensional manifold. A *Riemannian metric* g on M is a smooth section of $T^*M\otimes T^*M$ defining a positive definite symmetric bilinear form on T_pM for each $p\in M$. In local coordinates $(x^1,\cdots,x^n)$, one has a natural local basis $\{\partial_1,\cdots,\partial_n\}$ for TM, where $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$. The $\boxed{\text{metric tensor } g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j}$ is represented by a smooth matrix-valued function

$$\boxed{g_{ij}=g(\partial_i,\partial_j).}$$

The pair (M,g) is a *Riemannian manifold*. We denote by (g^{ij}) the inverse of the matrix (g_{ij}).

En dimensión tres los ataques topológicos han sido infructuosos. Se han requerido ataques geométricos que tienen sentido ya que DIFF=PL=TOP, si dos variedades son homeomorfas en n=3 siempre existe un difeomorfimos (suave) entre ellas.

En una variedad topológica, la “forma” (distancias y ángulos) no es preservada ya que no tenemos ninguna manera de medir distancias y ángulos. En el plano (o el espacio) euclídeo medimos distancias y ángulos mediante un producto escalar (o interior) de vectores, que nos da el ángulo entre dos vectores y su magnitud (o longitud).

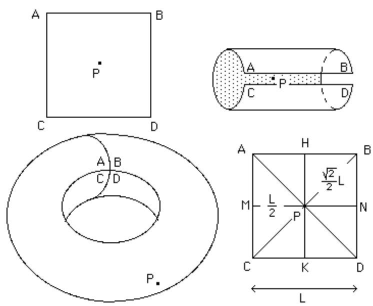
En general, un producto interior viene dado por un matriz simétrica. Como una variedad topológica es localmente podemos "pensar" en introducir un producto interior en cada plano tangente y obtener un "campo" tensorial para la métrica.

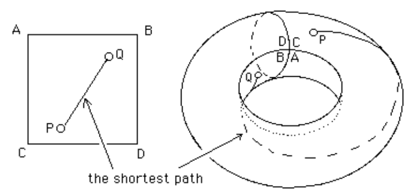
Si la métrica es suave (infinitamente diferenciable, la variedad se ha dotado de una estructura llamada riemanniana, también decimos que la variedad es diferenciable.

La métrica permitirá medir longitudes de curvas en la variedad, áreas, volúmenes, … así como ángulos entre curvas, y conceptos más complejos

Geometrizar una variedad

- Toda variedad topológica admite infinitas métricas suaves, aunque tiene asociada una métrica "natural"
- Conceptos "intrínsecos" como la longitud de una curva, un área, un volumen, … la curvatura intrínseca, … dependen de la métrica.
- Toro 2D plano vs. Toro 2D sumergido en 3D





Existe métrica homogénea para el toro con curvatura ¡¡ nula !! ¿ intuitivo ?

Las variedades riemannianas son “suaves” si tienen una métrica que es infinitamente diferenciable. En el s. XIX se demostró que toda variedad topológica admite infinitas métricas.

Hay una métrica “natural” que nos indica cómo es la curvatura de la variedad cuando la “metemos” (sumergimos) en un espacio euclídeo de dimensión mayor. Pero en general, la curvatura dada por una métrica no “coincide” con la curvatura que nos “imaginamos” que tiene la variedad. Por ejemplo, hay una métrica homogénea que hace que el toro tenga curvatura cero, sea plano, un toro plano. Parece algo poco “intuitivo” pero es así. La métrica nos habla de propiedades intrínsecas de la variedad, que no tiene por qué coincidir con sus propiedades extrínsecas (cuando la sumergimos en un espacio euclídeo de dimensión adecuada (mayor) para “verla” desde fuera).

Dos geometrías en variedades diferenciables equivalentes, o difeomorfas, cuando existe una aplicación diferenciable y con inversa diferenciable entre sus métricas asociadas.

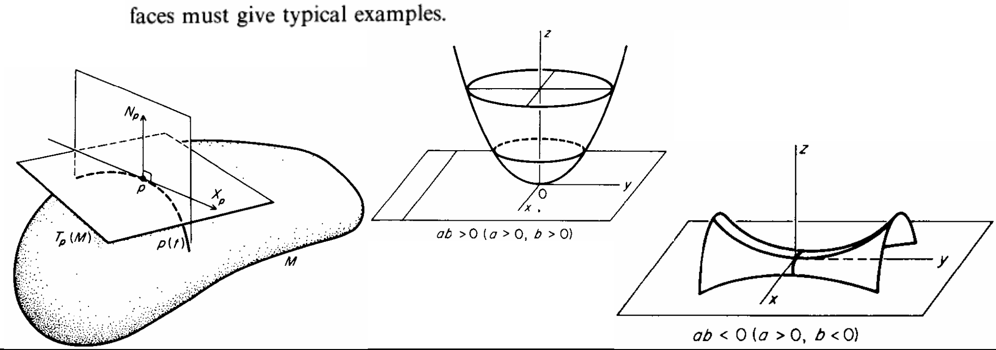
Curvatura de Riemann

- Curvatura gaussiana para variedades en n=2

Let $f(x, y)$ be expanded in Taylor series at $(0, 0)$. Then

$$z = f(x, y) = f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{yy}(0, 0)y^2 + R_2 ,$$

where R_2 contains terms of higher order. Let $f_{xx}(0, 0) = a$ and $f_{yy}(0, 0) = b$. Then we see that the normal sections of $z = ax^2 + by^2$ have the same sectional curvatures at p as does the given surface. Therefore the quadric surfaces must give typical examples.



El concepto de curvatura de una variedad es un concepto difícil que resolvió Gauss para superficies y que extendió Riemann a hipersuperficies introduciendo el tensor llamado de Riemann (que el no calculó explícitamente, sino que fue Christoffel el primero que lo hizo; en su artículo original sólo hay una fórmula, el resto es texto).

La idea es una generalización a n dimensiones del concepto de curvatura de Gauss para superficies. Es un concepto difícil de explicar y aquí no entraremos en detalles.

Baste decir que localmente, en coordenadas adecuadas, llamadas homogéneas, la descripción de la métrica de la variedad admite un desarrollo de Taylor y el tensor de Riemann es el que multiplica a las derivadas segundas.

Curvatura de Riemann

- Tensor de curvatura de Riemann en coordenadas locales

$$\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl} \qquad g_{ij}(x) \; = \; \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iklj} x^k x^l +$$

- La "interpretación" geométrica de este tensor "más sencilla" requiere el concepto de curvaturas seccionales (curvaturas a la Gauss de planos 2D en el hiperplano tangente a M)

The *sectional curvature* of a 2-plane $P \subset T_pM$

$$K(P) = \mathcal{R}(X, Y, X, Y),$$

- El tensor de curvatura "intrínseca" de Riemann es poco intuitivo porque es invariante a difeomorfismos:
  - Una curva tiene curvatura intrínseca ¡¡ nula !!

El tensor de curvatura de Riemann nos mide la curvatura intrínseca de la métrica. Como una variedad admite infinitas métricas, la “curvatura” intrínseca de una variedad topológica puede “cambiar” sin que la variedad misma cambie. Esto es un poco intuitivo, pero es así. Por supuesto, cada variedad tiene una métrica “natural” con la que sus propiedades intrínsecas de curvatura coinciden con sus propiedades extrínsecas. Además, cada métrica define una “variedad natural” en la que “mejor vive”. Esto es difícil de explicar brevemente y en esta charla me limitaré a dar el ejemplo del toro. Un toro (que todos vemos como algo “curvado”) admite una métrica que nos dice que “tiene” curvatura nula, que es difeomorfo a un toro plano, algo que nos puede resultar “anti-intuitivo”. Pero así son la topología y la geometría intrínsecas. Muchas veces muy anti-intuitivas. Por ejemplo, el tensor de curvatura de Riemann es nulo para una curva. Es decir, una curva “curvada” no tiene “curvatura intrínseca riemanniana”, su tensor de curvatura de Riemann es exactamente cero. Parece un juego de palabras, “una curva no tiene curvatura intrínseca”, pero es así, el tensor de Riemann es independiente de las coordenadas módulo difeomorfismos, por lo que si existe un difeomorfimos que “quite” la curvatura, la variedad no tiene curvatura. Es difícil de entender, pero es así.

La mejor manera de interpretar el tensor de curvatura de Riemann, en mi opinión, es mediante el concepto de curvatura seccional, pero ello nos llevaría lejos. Presentaremos esta idea en la próxima charla.

Curvatura de Riemann

- Tensor de curvatura de Ricci

$$Ric(X,Y) = Ric_g(X,Y) = g^{kl}R(X,\partial_k,Y,\partial_l).$$

$$Ric = Ric_{ij}dx^i \otimes dx^j, \quad Ric_{ij} = Ric(\partial_i,\partial_j).$$

- Escalar de curvatura

$$R = R_g = \mathrm{tr}_g Ric = g^{ij}Ric_{ij}.$$

- R determina Ric y Riemann en n=2
- Ric determina Riemann en n=3
- Riemann es necesario sólo en n>3

A partir del tensor de Riemann podemos obtener, mediante un promediado adecuado de las curvaturas seccionales, el tensor de Ricci, que en coordenadas explícitas se obtiene por contracción de índices. El tensor de Ricci es una matriz que tendrán n autovalores (3 en tres dimensiones). Promediando todas las curvaturas seccionales en un punto, lo que se dice en coordenadas por contracción de los índices del tensor de Ricci, se obtiene el escalar de curvatura R.

En dos dimensiones la curvatura escalar caracteriza (darla especifia de forma unívoca) el tensor de Ricci y el de Riemann. En tres dimensiones el tensor de Ricci especifica de forma única el tensor de Riemann. En cuatro y más dimensiones son necesarios los tres tensores.

Geometrización de variedades

- Teorema de homogeneización (s. XIX): Toda variedad topológica admite una métrica (geometría riemanniana) homogénea tal que tiene curvatura constante
  - Positiva igual a 1 => difeomorfa a la esfera
  - Nula (igual a 0) => difeomorfa al plano euclídeo
  - Negativa igual a -1 => difeomorfa al plano proyectivo

Theorem 1 *If X^n is a simply connected, complete Riemannian manifold with constant sectional curvature $+1$, 0 or -1 then X is isometric to S^n, $\mathbb{E}^n$ or $\mathbb{H}^n$ respectively.*

In particular the only homogenous, simply connected Riemannian surfaces are S^2, $\mathbb{E}^2$ and $\mathbb{H}^2$; these all have compact quotients, so they are the three 2-dimensional geometries.

¿Y por qué estamos contando todo esto?

En el siglo XIX se demostró el teorema de homogeneización (o geometrización). Toda variedad topológica admite una estructura geométrica (es variedad diferenciable o riemanniana) de curvatura constante (u homogénea, igual en todos los puntos): positiva = 1 (la de la esfera), nula = 0 (la del plano euclídeo), o negativa = -1 (la del plano proyectivo). Por ejemplo, el toro hemos dicho que admite una métrica homogénea que lo dota de curvatura nula.

Conjetura de Thurston

Decomposition of 3-manifolds:

Assume that M is closed (compact, no boundary).

Step 1: Connected sum decomposition of M into *prime* pieces (closed manifolds which cannot be decomposed further).

Step 2. If M is prime, consider a *toral* decomposition of M along *incompressible* [1] tori into *simple* pieces (the ones which cannot be decomposed further). Note that simple pieces typically have nonempty toral boundary.

Both decomposition processes terminate (Kneser, Haken: theory of normal surfaces).

Uniqueness of the decompositions: (1) Components of the connected sum decomposition are uniquely determined by M (Milnor). (2) The toral decomposition is unique up to isotopy if we consolidate simple pieces into maximal geometric pieces (Jaco, Shalen; Johannson).

Similar decompositions exist for compact manifolds with boundary.

Thurston's Geometrization Conjecture (GC): *Each prime closed 3-manifold M is either geometric or its simple pieces are geometric.*

3-dimensional geometries

- $S^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3$, are the constant (sectional) curvature geometries.
- $S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ are the product geometries.
- $Nil, Sol, \widetilde{SL_2}(\mathbb{R})$ are the twisted product geometries.

¿Se puede extender este resultado a tres dimensiones? Esta es la conjetura de Thurston. La extensión no es nada fácil y explicarla en detalle nos llevaría lejos de nuestro objetivo. Muy brevemente podemos decir que toda variedad diferenciable se puede descomponer (con una descomposición de esferas) en un conjunto de esferas y de subvariedades primas (aesféricas, que no son esferas), y que éstas se pueden a su vez descomponer (con una descomposición de toros) en un conjunto de toros y de subvariedades irreducibles (atoroidales, que no son toros), y que éstas últimas, módulo ciertos grupos de simetría, pueden ser dotadas de métricas "homogéneas" de 8 tipos diferentes. No explicaré lo que significan, ello nos llevaría lejos de nuestro objetivo. Sólo diré que Thurston recibió la medalla Fields en 1986 por demostrar los casos aparentemente "difíciles" de explicar de esta conjetura en 1982. Quedaron las variedades de curvatura negativa, para las que propuso un esquema de demostración, que finalmente se obtuvo en 1999 y 2000, y el caso de curvatura positiva, las esferas, que Perelman ha logrado resolver recientemente. El primer caso se llamó conjetura de hiperbolización (curvatura igual a menos uno) y el segundo conjetura de eliptización (curvatura igual a más uno).

Conjetura de Thurston

- Michael Thurston (Medalla Fields 1986)

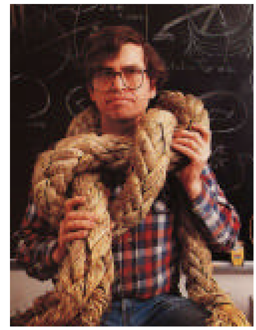
4. The Thurston Geometrization Conjecture

In the two-dimensional case, each smooth compact surface can be given a beautiful geometrical structure, as a round sphere in the genus zero case, as a flat torus in the genus 1 case, and as a surface of constant negative curvature when the genus is 2 or more. A far-reaching conjecture by William Thurston in 1983 claims that something similar is true in dimension 3 [46].

There are eight possible three-dimensional geometries in Thurston's program. Six of these are now well understood,[5] and there has been a great deal of progress with the geometry of constant negative curvature.[6] The eighth geometry, however, corresponding to constant positive curvature, remains largely untouched. For this geometry, we have the following extension of the Poincaré Conjecture.

Thurston Elliptization Conjecture. *Every closed 3-manifold with finite fundamental group has a metric of constant positive curvature and hence is homeomorphic to a quotient S^3/Γ, where $\Gamma \subset SO(4)$ is a finite group of rotations that acts freely on S^3.*

The Poincaré Conjecture corresponds to the special case where the group $\Gamma \cong \pi_1(M^3)$ is trivial. The possible subgroups $\Gamma \subset SO(4)$ were classified long ago by [19] (compare [23]), but this conjecture remains wide open.



GEOMETRY and the IMAGINATION

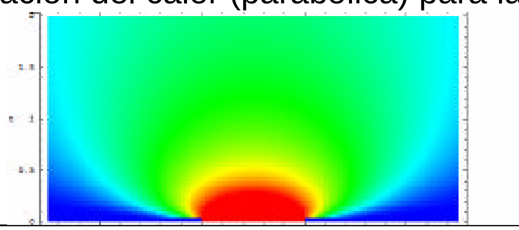
La conjetura de Thurston se menciona en la descripción de Milnor de la conjetura de Poincaré para el premio del milenio. Milnor indica que en 3 dimensiones los "ataques" topológicos han sido infructuosos durante el siglo XX y acaba con una sección en la que considera como muy prometedor un ataque geométrico a la conjetura basado en otra conjetura, la de geometrización debida a Thurston, que estaba "casi" resuelta.

Sólo faltaba "entender" las esferas, la denominada conjetura de Eliptización de Thurston, lo mismo que pretende la conjetura de Poincaré, pero desde un punto de vista geométrico, en lugar desde un punto de vista topológico. En 3 dimensiones ambos enfoques, como veremos, son equivalentes.

El ataque geométrico es interesante porque ofrece un gran número de nuevas herramientas que están fuera del alcance de quien pretende utilizar solamente herramientas topológicas.

Programa de Hamilton-Yau

- Richard Hamilton
  – Joven postdoc, "creador" del flujo de Ricci para demostrar la conjetura de eliptización de Thurston (entonces muy de moda).
- Shing-Tung Yau
  – Medalla Fields en 1982 por su demostración de la conjetura de Calabi, colaboró con Hamilton en cómo atacar la conjetura.
- Idea: Queremos homogeneizar la curvatura. La ecuación del calor homogeneiza la temperatura, ¿por qué no usar una ecuación del calor (parabólica) para la curvatura?



La conjetura de eliptización es “casi” equivalente a la conjetura de Poincaré, ya que la contiene como caso particular, requiriendo además la conjetura de Smale. No entraré en más detalles, sólo indicar que básicamente lo que parecía difícil de demostrar en 1982 es la conjetura de eliptización de Thurston, y este fue el problema que trató de resolver Richard Hamilton en 1982 cuando introdujo el flujo de Ricci con el programa de Hamilton-Yau.

Yau es, posiblemente, el más prestigioso matemático chino de la actualidad. Demostró la conjetura de Calabi, sobre lo que ahora se llaman variedades de Calabi-Yau, lo que le llevó a obtener la medalla Fields en 1982. Estas variedades se utilizan mucho en Teoría de Cuerdas en Física Teórica y Relativista, no entraremos en más detalles. Yau es uno de los padres del llamado “Análisis Geométrico”, el uso de ecuaciones en derivadas parciales cuyo dominio es una variedad o que modelan magnitudes geométricas.

Hamilton era un postdoc joven cuando decidió estudiar el flujo de Ricci y reorientar su carrera hacia el programa de Hamilton-Yau para demostrar la conjetura de eliptización de Thurston, en parte guiado por Yau.

La demostración de Perelman de la conjetura de Poincaré sigue al pie de la letra el programa de Hamilton-Yau para demostrarla utilizando análisis geométrico.

Programa de Hamilton-Yau

- Ecuación del flujo de Ricci (el volumen decrece)

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\Delta g_{ij} + \text{lower order terms}$$

(operador Laplace-Beltrami)

- Ecuación del flujo de Ricci normalizado (volumen const.)

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\mathrm{Ric} + \frac{R}{2}g$$

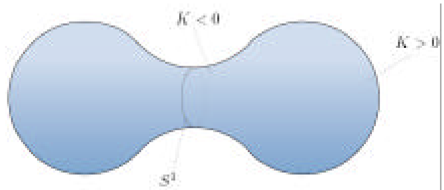
La idea es sencilla y nos lleva a una analogía con la ecuación del calor. La ecuación del calor "homogeiniza" la distribución de temperatura en un dominio. Veamos tres ejemplos de distribuciones de calor que conducen al mismo resultado. Hamilton buscó una ecuación que hiciera lo mismo para la curvatura, en la que la curvatura se comportara como el calor. De esta manera, partiendo de una métrica aplicada a una variedad (compacta y no orientable, recuerdese) si tuviéramos una ecuación que evolucione la curvatura llevandola a alcanzar un equilibrio en el que la curvatura sea constante, podríamos demostrar la conjetura de eliptización de Thurston y con ella la conjetura de Poincaré.

En general tendremos una ecuación como la siguiente, donde el funcional debe depender de la curvatura y la ecuación debe parecerse a una ecuación del calor (técnicamente una ecuación parabólica). Hamilton descubrió que la ecuación llamada flujo de Ricci cumplía con estas condiciones. Hemos de recalcar que el 2 es un factor de conveniencia, aparecen muchos 1/2 en los cálculos, pero el signo menos es muy importante. Si ponemos el signo más, la ecuación resultante se parece a la ecuación del calor con el tiempo hacia atrás, ecuación que no tiene solución única.

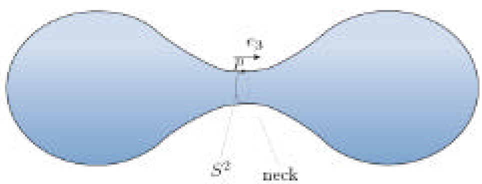
Flujo de Ricci

- Hamilton (1982): Teorema de homogeneización en 2D

Gauss curvature K as $\mathrm{Ric}(g) = Kg$.



- En 3D es más difícil porque se producen singularidades



$$\mathrm{Ric}(e_1, e_1) = K_{e_1 \wedge e_2} + K_{e_1 \wedge e_3} = \text{very positive}$$
$$\mathrm{Ric}(e_2, e_2) = K_{e_2 \wedge e_1} + K_{e_2 \wedge e_3} = \text{very positive}$$
$$\mathrm{Ric}(e_3, e_3) = K_{e_3 \wedge e_1} + K_{e_3 \wedge e_2} = \text{slightly negative}$$

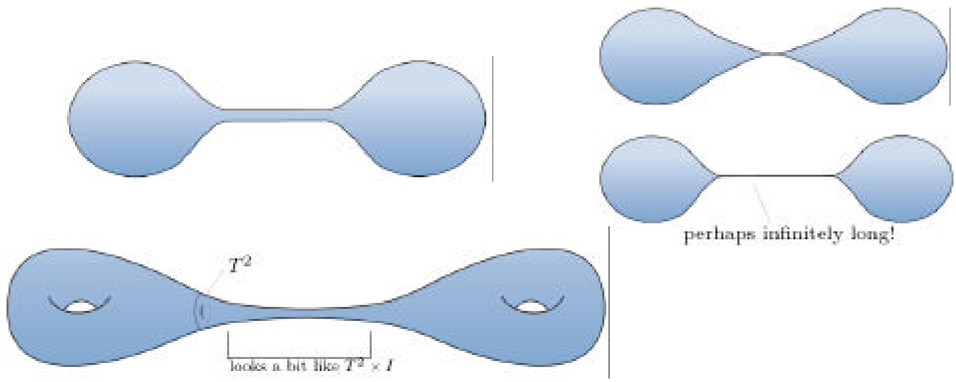
En la próxima charla preesentaremos las propiedades más importantes del flujo de Ricci con detalle.

Ahora me limitaré a indicar que en dos dimensiones, el flujo de Ricci existe en todo tiempo, además toda variedad tiende a redondearse aproximándose a una esfera y reduciendo su volumen.

En tres dimensiones el asunto es más problemático, ya que, para variedades con curvatura seccional no definida, el flujo puede generar singularidades.

Flujo de Ricci

- Teorema de Pinzamiento de Hamilton-Ivey: la curvatura positiva tiende a aumentar reduciendo el volumen, y la negativa tiende a hacerse más negativa, pero menos rápido que la positiva: 3 posibilidades, a priori,



El teorema del pinzamiento de Hamilton-Ivey nos indica que la parte positiva tiende a reducir su volumen y a aumentar su curvatura y la parte negativa evoluciona mucho más lentamente. Por ello se puede generar un cuello (neck) y posiblemente una singularidad.

Veamos una ilustración gráfica del proceso. Esta variedad representa la proyección bidimensional de una variedad tridimensional y la sección transversal del cuello no es una circunferencia, es una esfera. Podría ser un toro o cualquier otra variedad. Esto es difícil de imaginar, pero es así. En el cuello las 3 curvaturas seccionales son dos positivas (las de la esfera) y una es negativa (la del cuello). Cuando evoluciona el flujo de Ricci se produce un pinzamiento del cuello y una singularidad en tiempo finito. La curvatura se vuelve infinita (la esfera colapsa hasta convertirse en un punto, superior derecha, o un segmento, inferior derecha).

Si vamos a usar el flujo de Ricci en una demostración matemática necesitamos saber si existe su solución y si es única. Esto lo demostró la existencia y unicidad local de soluciones Hamilton en 1982 utilizando técnicas matemáticas bastante complicadas (iteración de Nash-Moser, donde Nash es el famoso matemática de la película “Una Mente Maravillosa). Hay una demostración mucho más sencilla de DeTurck que veremos en la próxima charla. Qué significa existencia y unicidad local, pues que para tiempo corto existe la solución pero no para un tiempo infinito.

Hamilton demostró un resultado muy interesante. En cada punto de la variedad, el tensor de Ricci es una matriz que tiene tres autovalores, básicamente las curvaturas seccionales de la variedad en ese punto. Si la curvatura seccional en todo punto de la variedad es positiva, el flujo de Ricci existe para todo tiempo, y más aún, la métrica tiende a una métrica de curvatura constante. De hecho, Hamilton demostró que la conjetura de eliptización de Thurston es verdad si la métrica de curvatura seccional positiva en todo punto. Como caso particular de la conjetura de Poincaré. Si la variedad tiene una métrica de curvatura seccional positiva en todo punto, entonces bajo flujo de Ricci se extingue (se contrae hasta un punto) en tiempo finito. Esto es debido a que el volumen de la variedad bajo flujo de Ricci se reduce. Hamilton introdujo el flujo de Ricci normalizado, que conserva el volumen, con el cuál la métrica que se obtiene en tiempo infinito es una métrica de curvatura positiva constante (que podemos

Flujo de Ricci con cirugía

- Clasificación de todas las superficies (variedades 2D)
- ¿Cuándo dos variedades son homeomorfas (equivalentes)?
  - Existe transformación continua con inversa continua entre ellas

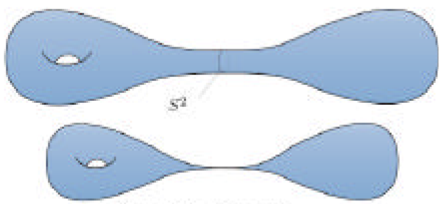


Figure 1.6: Neck pinch

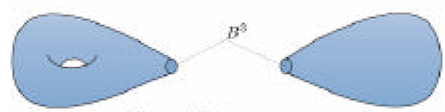


Figure 1.7: Surgery

  - Por supuesto, he de hacer "bien" la cirugía

La idea del programa de demostración de Hamilton y Yau es desarrollar un flujo con “cirugía”, es decir, evolucionar la métrica hasta que se generen singularidades, parar entonces el flujo, “cortar” las regiones que tengan singularidades y substituirlas por regiones de geometría controladad (esferas) y continuar (re-empezar) el flujo hasta que se vuelvan a producir singularidades. Veamos una ilustración gráfica del proceso.

Esta variedad representa la proyección bidimensional de una variedad tridimensional y la sección transversal del cuello no es una circunferencia, es una esfera. En el cuello las 3 curvaturas seccionales son dos positivas (las de la esfera) y una es negativa (la del cuello). Cuando evoluciona el flujo de Ricci se produce un pinzamiento del cuello y una singularidad en tiempo finito. La curvatura se vuelve infinita (la esfera colapsa hasta convertirse en un punto). Cuál es la idea de la cirugía. Cortamos cerca de la singularidad y sustituimos la región “cortada” por dos esferas adecuadas y continuamos el flujo de Ricci con las dos variedades resultantes, que en este caso, ya tienen curvatura seccional positiva en todo punto y se extingen en tiempo finito.

Si hago bien la cirugía, podré reconstruir la métrica original a partir del resultado en cada subvariedad y montar una métrica común a toda la variedad original, salvo la región cortada, pero que como inicialmente no presentaba singularidad alguna, mediante “interpolación” de la métrica puedo conseguir que tenga una curvatura igual que el resto de la variedad

Flujo de Ricci con cirugía

Problemas encontrados por Hamilton

1. Las singularidades, ¿todas se producen al mismo T*? Si no, no nos daría "tiempo" para hacer la cirugía
2. ¿El número de singularidades de M en T* es finito?
3. Hay que clasificar todos los tipos de singularidades, e indicar cómo aplicar la cirugía a cada tipo
4. Los tiempos de blow-up T* no pueden acumularse, es decir, en un intervalo finito sólo habrá un número finito

Hamilton realizó casi todo el programa "módulo" ciertas conjeturas "razonables" que no fue capaz de demostrar

La idea es “preciosa” si se logran resolver todos los escollos que plantea. Simplificando mucho, es necesario que, (1) todas las singularidades se produzcan “al mismo tiempo”, (2) que el número de singularidades que se producen en un momento dado son un número finito, (3) hay que clasificar todas y cada una de las posibles singularidades y desarrollar un proceso de cirugía que funcione con todas ellas, y (3) hay que demostrar que los tiempos de blow-up no se pueden acumular, no pueden tener un punto de acumulación, que en en un intervalo finito de tiempo sólo se producen un número finito de tiempos (o momentos) con singularidades.

Singularidades del flujo de Ricci

1. Demostrado por Hamilton. Típico en ecuaciones parabólicas no lineales
2. Requiere una acotación del llamado radio de inyectividad. Requiere una acotación coercitiva de la curvatura. Fue obtenida por Perelman, demostrando que "sólo caben" un número finito de singularidades.
3. Clasificación de las singularidades: son solitones del flujo de Ricci (estacionarios en T*) y tipo gradiente un "poquito" antes (soluciones ancianas). Hamilton encontró demasiadas "posibles" singularidades, entre ellas el solitón cigarro.

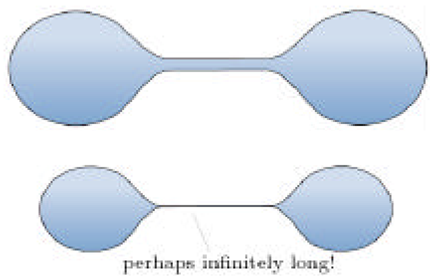
El primer punto ya lo demostró Hamilton y es típico de la explosión de soluciones en ecuaciones parabólicas no lineales, los puntos que explotan, todos lo hacen al mismo ritmo y alcanzan la curvatura infinita en el mismo momento todos ellos.

Demostrar que sólo se pueden producir un número finito de singularidades en un momento de blow-up dado requiere lo que se llama una acotación del radio de inyectividad. Brevemente, el radio de inyectividad mide la mínima distancia que alrededor de un punto con cierta curvatura garantiza que la curvatura de dicho entorno está dentro de determinado intervalo. Se necesita una acotación coercitiva, es decir, por arriba y por abajo del radio de inyectividad. Hamilton no fue capaz de obtenerla, sólo por encima, aunque conjeturó que existiría tal cota. Perelman sí logró obtenerla, veremos algo más sobre ello en mi cuarta charla. De esta forma, en cada región de volumen volumen finito de la variedad “sólo caben” un número finito de singularidades.

El tercer punto, clasificar los posibles tipos de singularidades fue muy avanzado por Hamilton. Estas singularidades son un tipo muy especial de soluciones de flujo de Ricci, soluciones uniparamétricas denominadas solitones de Ricci. En mi tercera charla hablaremos más en detalle de lo que son los solitones de ecuaciones del calor no lineales y del flujo de Ricci. Hamilton fue capaz de encontrar todas los solitones del flujo de Ricci, tanto estáticos, el resultado final de la singularidad, como dinámicos, tipo gradiente, que describen la fase final de la singularidad (son un tipo de

Singularidades del flujo de Ricci

- El solitón cigarro: la pesadilla de Hamilton
  - Conjeturó que no pueden darse, pero no lo pudo demostrar



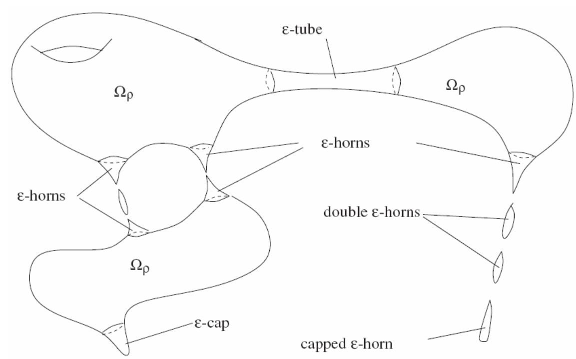
  - "Cilindro" que se contrae uniformemente generando infinitas singularidades. La cirugía no funciona con estas soluciones

La gran pesadilla de Hamilton fue el llamado solitón cigarro (o puro). El cilindro de este solitón se contrae uniformemente generando en el límite un segmento de singularidades. Quizás os pueda resultar fácil “pensar” la idea de la cirugía sobre un solitón cigarro, sin embargo, debido a ciertas cuestiones técnicas, el procedimiento de cirugía no funciona con una singularidad de este tipo. Hamilton conjeturó que no era posible que se produjeran singularidades de tipo solitón cigarro bajo flujo de Ricci, sin embargo, fue incapaz de demostrarlo.

Entropía de Perelman

- Demostró que el flujo de Ricci "es" un flujo gradiente
  - Entropía W
  - Volumen reducido
  - Magnitudes monótonas bajo flujo de Ricci
- El solitón cigarro ¡¡ no puede darse !! Viola la entropía

- Clasificación de singularidades



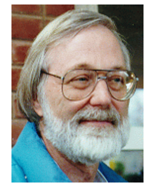
Teorema de no colapso => cirugía precisa y fina

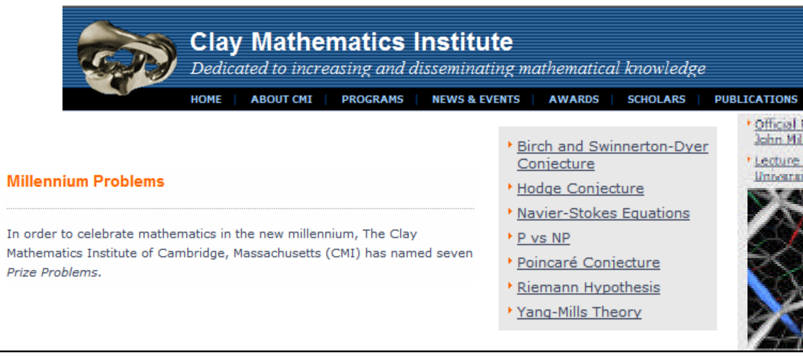
El gran avance de Perelman, en su primer artículo, es que logra superar el problema del solitón cigarro introduciendo lo que se llama una entropía (de hecho introdujo 2 diferentes). Perelman demostró que el flujo de Ricci es un flujo gradiente, lo que implica la existencia de una función “potencial” en la métrica “cae” como una piedra en la ladera de una montaña bajo el flujo de Ricci. Este entropía necesariamente es monótona bajo el flujo de Ricci. Sin embargo, no lo es para el solitón cigarro. Luego no se pueden producir singularidades de este tipo. La idea de Perelman es “maravillosa”. Se había demostrado que el flujo de Ricci no era un flujo gradiente, ¿entonces cómo lo hizo Perelman? Básicamente aprovechando la invarianza gauge (o de contraste) del flujo, logró cambiar la ecuación a una nueva ecuación para la que se puede utilizar un funcional de entropía, que ya se había utilizado en teoría de cuerdas por físicos teóricos, y en dos dimensiones se parece a un funcional previamente introducido por Hamilton. La idea es muy novedosa y ha causado gran admiración por los expertos.

Con esta entropía Perelman ha sido capaz de clasificar todas las posibles singularidades del flujo de Ricci, que son épsilon-tapaderas (epsilon-cap), épsilon-cuernos (epsilon-horn) y dobles-épsilon-cuernos (double-horns). Una vez clasificadas todas estas singularidades ha desarrollado un proceso de cirugía muy avanzado que ha permitido demostrar el siguiente teorema de no colapso. En la cuarta charla hablaremos de este tema en más detalle.

Yo y la conjetura de Poincaré

- 1992 "Topología Algebraica" Aniceto Murillo (UMA)
  - La demostración está próxima (sin detalles)
- 2000 "Premios del milenio"
  - 1 millón de dólares para los "mejores"





Siendo yo alumno de "Topología Algebraica" en la Facultad de Ciencias de Málaga, el profesor Aniceto Murillo, tras introducir la Homotopía y los Grupos Fundamentales, antes de empezar a estudiar la Homología Simplicial, nos indicó que la Conjetura de Poincaré sería demostrada próximamente. No recuerdo que indicara cómo.

Es muy difícil que Aniceto superiera que ese año un joven doctor en matemáticas ruso llamado Grisha Perelman se encontraba de PostDoc en los EEUU y asistió a una conferencia impartida por Richard Hamilton (un geómetra) sobre una ecuación en derivadas parciales llamada Flujo de Ricci, que él mismo había introducido, y que prometía ser un nuevo camino para una demostración de la Conjetura de Thurston y con ella de la de Poincaré.

La conjetura de Poincaré es famosa entre el público en general por ser uno de los premios del milenio, dotados cada uno con un millón de dólares. Estos premios los concede el Instituto Clay de Matemáticas, creado por un empresario de Boston que, en mi opinión, quiere pasar a la historia como ya lo hizo Alfred Nobel.

La descripción oficial del problema fue escrita por el gran topólogo John Milnor

"Demostraciones" en 2002 conjetura de Poincaré

Dunwoody, M. J. "A Proof of the Poincaré Conjecture." http://www.maths.soton.ac.uk/pure/viewabstract.phtml?entry=655. Rev. Apr. 9, 2002.

Nikitin, S. "Proof of the Poincare Conjecture" 22 Oct 2002. http://arxiv.org/abs/math.GT/0210334/.

Perelman, G. "The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Application" 11 Nov 2002. http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159/.

*St.Petersburg branch of Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27, St.Petersburg 191011, Russia. Email: perelman@pdmi.ras.ru or perelman@math.sunysb.edu ; I was partially supported by personal savings accumulated during my visits to the Courant Institute in the Fall of 1992, to the SUNY at Stony Brook in the Spring of 1993, and to the UC at Berkeley as a Miller Fellow in 1993-95. I'd like to thank everyone who worked to make those opportunities available to me.

Authors: **Grisha Perelman**
Comments: 39 pages
Subj-class: Differential Geometry
MSC-class: 53C

We present a monotonic expression for the Ricci flow, valid in all dimensions and without curvature assumptions. It is interpreted as an entropy for a certain canonical ensemble. Several geometric applications are given. In particular, (1) Ricci flow, considered on the space of riemannian metrics modulo diffeomorphism and scaling, has no nontrivial periodic orbits (that is, other than fixed points); (2) In a region, where singularity is forming in finite time, the injectivity radius is controlled by the curvature; (3) Ricci flow can not quickly turn an almost euclidean region into a very curved one, no matter what happens far away. We also verify several assertions related to Richard Hamilton's program for the proof of Thurston geometrization conjecture for closed three-manifolds, and give a sketch of an eclectic proof of this conjecture, making use of earlier results on collapsing with local lower curvature bound.

Desde el año 2000, he realizado "cierto" seguimiento de las "demostraciones" que se publican sobre los problemas del Milenio del Instituto Clay. Un millón de dólares como "jugoso" premio ha hecho que muchos matemáticos jóvenes (y no tan jóvenes) concentren todos sus esfuerzos en estos problemas, no siempre con éxito.

En el año 2002 se "publicaron", que yo sepa, tres demostraciones de la conjetura de Poincaré.

La primera de Dunwoody, a finales de marzo, con 5 páginas, utilizaba técnicas de Variedades Grafo (graph manifolds). El artículo era "fácil" de entender, pero 5 páginas parecían pocas para un problema tan "difícil" como la conjetura de Poincaré. Un par de semanas más tarde se encontró un error, el argumento no funcionaba en una de las figuras del propio artículo.

Así que…

"Demostraciones" en 2002 conjetura de Poincaré

Dunwoody, M. J. "A P

http://www.maths.so

A Proof of the Poincaré Conjecture ?
by
M.J.Dunwoody

ry=655. Rev. Apr. 9, 2002.

Nikitin, S. "Proof of the Poincare Conjecture" 22 Oct 2002.
http://arxiv.org/abs/math.GT/0210334/.

Perelman, G. "The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Application" 11 Nov 2002. http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159/.

*St.Petersburg branch of Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27, St.Petersburg 191011, Russia. Email: perelman@pdmi.ras.ru or perelman@math.sunysb.edu ; I was partially supported by personal savings accumulated during my visits to the Courant Institute in the Fall of 1992, to the SUNY at Stony Brook in the Spring of 1993, and to the UC at Berkeley as a Miller Fellow in 1993-95. I'd like to thank everyone who worked to make those opportunities available to me.

Authors: **Grisha Perelman**
Comments: 39 pages
Subj-class: Differential Geometry
MSC-class: 53C

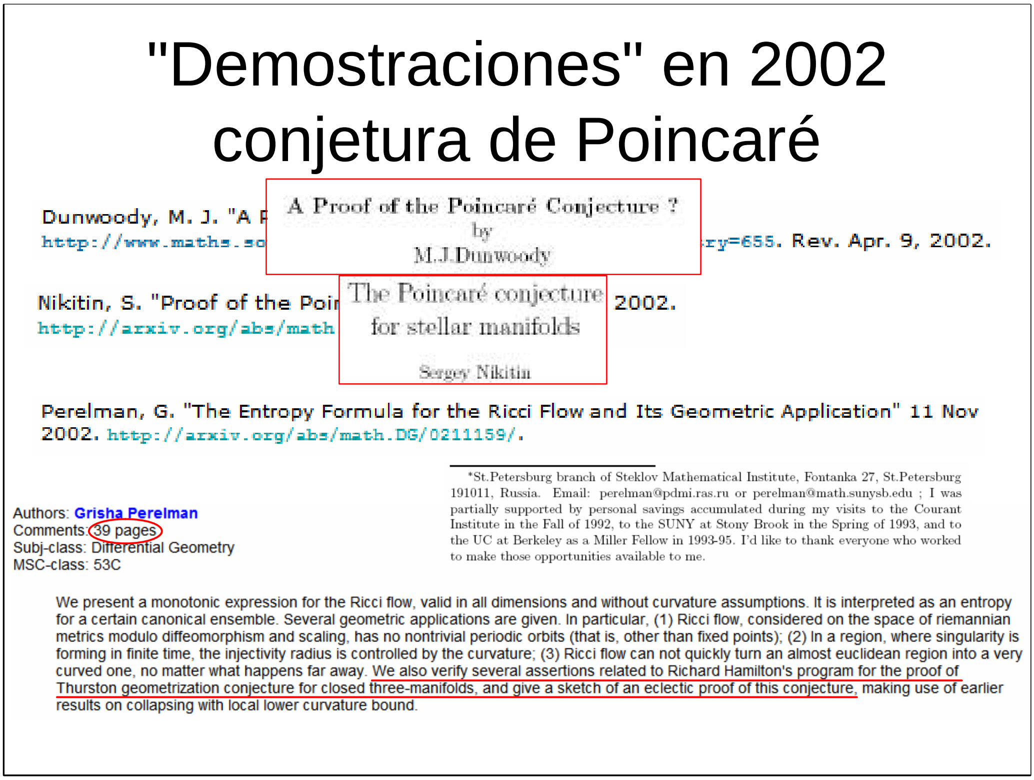
We present a monotonic expression for the Ricci flow, valid in all dimensions and without curvature assumptions. It is interpreted as an entropy for a certain canonical ensemble. Several geometric applications are given. In particular, (1) Ricci flow, considered on the space of riemannian metrics modulo diffeomorphism and scaling, has no nontrivial periodic orbits (that is, other than fixed points); (2) In a region, where singularity is forming in finite time, the injectivity radius is controlled by the curvature; (3) Ricci flow can not quickly turn an almost euclidean region into a very curved one, no matter what happens far away. We also verify several assertions related to Richard Hamilton's program for the proof of Thurston geometrization conjecture for closed three-manifolds, and give a sketch of an eclectic proof of this conjecture, making use of earlier results on collapsing with local lower curvature bound.

A finales de octubre, Nikitin, un matemático especializado en control, publicó una demostración de 21 páginas basada en variedades estrelladas (stellar manifolds). Proponía que las variedades más difíciles para la conjetura de Poincaré son una especie de erizos (esferas) llenos de espinas y proponía técnicas de "cirugía" con las que "podaba" las púas y obtenía una esfera.

Sin embargo, no todas las variedades son estrelladas…

Pocos semanas más tarde, mientras yo estaba "estudiando" la demostración de Nikitin, y tenía reciente en mi cabeza la descripción de Milnor del premio del Milenio, se publicó un artículo con un título "extraño", que encontré por casualidad.

Me resultó curioso el título. No sé muy bien por qué. Leí el resumen (abstract) y me sorprendió porque presentaba un "boceto" (sketch) de una demostración de la conjetura de geometrización de Thurston, que implicaba la conjetura de Poincaré. Así que me leí el artículo buscandola,pero el artículo no la menciona en ningún momento.



El artículo no tiene la forma habitual de un artículo técnico, aunque se lee "fácil", resulta prácticamente incomprensible. Con un contenido altamente técnico.

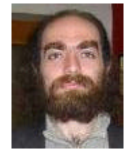
Me enteré de muy poco, pero me gustó, era una demostración basada en ecuaciones en derivadas parciales, tema que yo "controlo" y que aplicaba conceptos como la "cirugía", que tras leer el artículo de Nikitin no me resultaron extraños, a las singularidades (blow-up o explosión de soluciones) para el campo de curvatura.

Pero me era imposible, debido a mi falta de conocimientos, saber si era una demostración "correcta" u otro "fiasco" como las dos anteriores.

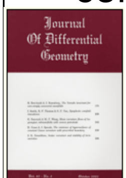
En cualquier caso, Antonio Galvín quizás recuerde que le comenté en noviembre de 2002 que creía que la conjetura de Poincaré ya había sido demostrada y cómo le conté, regados con unas cervezas, cómo procedía la prueba en términos muy "generales".

Consulté grupos de noticias (newsgroups) buscando información sobre la demostración, para conocer la opinión de los "expertos". Pero parecía que la demostración era difícil de entender también para los expertos.

"Demostraciones" en 2002 conjetura de Poincaré



- ¿Quién "era" ese Grisha Perelman?
- Grigori Perelman: alumno de Alexandrov
- Considerado un genio en geometría riemanniana
- "Famoso" por demostrar la conjetura (soul conjecture) de Cheeger-Gromoll (1972) en 1994



  - If M is a complete noncompact Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature, and there is one point where all of the sectional curvatures are positive, then M is diffeomorphic to Euclidean space.

G. Perelman
Proof of the Soul Conjecture of Cheeger and Gromoll p.209-212
PDF file

- Premio EMS (European Mathematical Society) en 1996 => "rechazó" el premio

¿Quién "era" ese tal Grisha Perelman?

Decidí consultar algunos grupos de noticias (newsgroups) de matemáticas y logré informarme de que se trataba de un tal "Grigori Perelman", un joven genio de la geometría riemanniana. Fue alumno de Alexandrov, el mejor geómetra ruso del s. XX, aunque lo conoció ya muy anciano. Tras defender su tesis doctoral en espacios de Alexandrov (un tipo de variedades geométricas riemannianas) estuvo entre 1992 y 1994 como postdoc en EEUU.

En 1994 demostró la conjetura de Cheeger-Gromoll, uno de los resultados más difíciles de la geometría riemanniana, que llevaba 20 años abierto.

La sorpresa fue enorme cuando la demostración tenía sólo 4 (sí cuatro) páginas. "Nadie daba crédito a sus ojos".

Esta demostración hizo "famoso" a Perelman en los círculos de geómetras, fue invitado a dar una charla en el congreso ICM de 1994 y recibió el premio de la Sociedad Matemática Europea (EMS) de 1996, que se conceden cada 4 años a jóvenes matemáticos "geniales" de menos de 32 años.

"Demostraciones" en 2002 conjetura de Poincaré

- ¿Es correcta la demostración?
- Extremadamente técnica
- Los expertos encontraron dificultades

"Que nos lo cuente" (gira americana en 2003)

Simons Lectures 2003

Grigory Perelman

Steklov Institute St. Petersburg, Russia

Ricci Flow and the Geometrization of 3-Manifolds

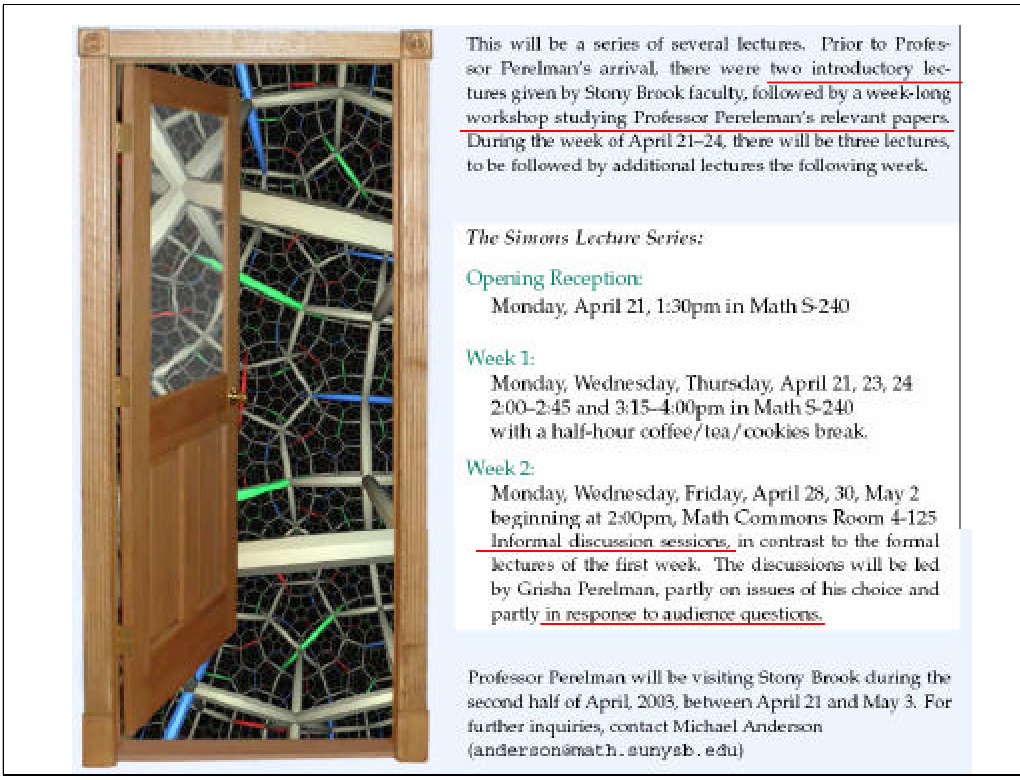
April 21 – May 2, 2003
Stony Brook University

Pero yo estaba interesado en saber la opinión de los expertos. ¿Es correcta la demostración?

Los expertos no se ponían de acuerdo. La demostración es extremadamente difícil de comprender. Dirigida a 4 o 5 expertos, hasta ellos encontraron dificultades.

Perelman fue invitado por varias universidades para contar su demostración (la llamada gira americana de primavera de Perelman en 2003).

Aquí tenéis el cartel anunciador de sus conferencias en la Universidad de Stony Brook de New York, donde ya estuvo Perelman en 1992 como postdoc.



This will be a series of several lectures. Prior to Professor Perelman's arrival, there were two introductory lectures given by Stony Brook faculty, followed by a week-long workshop studying Professor Pereleman's relevant papers. During the week of April 21–24, there will be three lectures, to be followed by additional lectures the following week.

The Simons Lecture Series:

Opening Reception:
Monday, April 21, 1:30pm in Math S-240

Week 1:
Monday, Wednesday, Thursday, April 21, 23, 24
2:00–2:45 and 3:15–4:00pm in Math S-240
with a half-hour coffee/tea/cookies break.

Week 2:
Monday, Wednesday, Friday, April 28, 30, May 2
beginning at 2:00pm, Math Commons Room 4-125
Informal discussion sessions, in contrast to the formal lectures of the first week. The discussions will be led by Grisha Perelman, partly on issues of his choice and partly in response to audience questions.

Professor Perelman will be visiting Stony Brook during the second half of April, 2003, between April 21 and May 3. For further inquiries, contact Michael Anderson (anderson@math.sunysb.edu)

Lo más interesante de este cartel es : ¡¡ cómo son los americanos !!

En lugar de invitar a Perelman para que dé una charla y ya está, prefieren desarrollar un seminario (workshop) en el que primero, los profesores introducen el tema del flujo de Ricci, luego se estudian los artículos de Perelman (ya había 2 artículos publicados) y, finalmente, se le invita para que cuente lo que quiera contestando a todas las preguntas que la audiencia quiera realizar.

Perelman "continua" en 2003

Date: Mon, 10 Mar 2003 16:44:35 GMT (24kb)

Ricci flow with surgery on three-manifolds

Authors: **Grisha Perelman**
Comments: 22 pages
Subj-class: Differential Geometry
MSC-class: 53C

This is a technical paper, which is a continuation of math.DG/0211159.

Date: Thu, 17 Jul 2003 15:26:38 GMT (8kb)

Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds

Authors: **Grisha Perelman**
Comments: 7 pages
Subj-class: Differential Geometry
MSC-class: 53C

Date (v1): Sun, 10 Aug 2003 12:41:19 GMT (10kb)
Date (revised v2): Mon, 25 Aug 2003 15:03:39 GMT (9kb)
Date (revised v3): Tue, 15 Aug 2006 10:52:15 GMT (18kb)

Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman

Authors: **Tobias H. Colding, William P. Minicozzi II**
Comments: published version
Subj-class: Analysis of PDEs
MSC-class: AP, DG, GT
Journal-ref: J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 3, 561-569

Dadas las dificultades encontradas por los expertos a la hora de comprender el primer artículo de Perelman y en función de las preguntas y cuestiones que le plantearon en su gira americana, en la que se descubrieron ciertos "flecos" en sus argumentos, Perelman decidió escribir dos artículos más sobre su demostración para aclarar ciertos puntos "conflictivos", entre ellos alguna afirmación (claim) falsa.

En el segundo, de 22 páginas, en marzo de 2003, se centra en ciertos detalles relevantes a la conjetura de Poincaré, aunque ni menciona a Poincaré ni a Thurston. Sólo menciona "detalles" técnicos. De hecho, corrige algunas afirmaciones incorrectas en su primer artículo.

En el tercero, de 7 páginas, en julio de 2003, aclara ciertos detalles relevantes a la conjetura de eliptización de Thurston.

Perelman prometió un cuarto artículo, que nunca escribió, con detalles importantes para la conjetura de geometrización, podemos decir que "fue escrito por" Colding y Minicozzi, en agosto de 2003.

Perelman "continua" en 2004

- Descripción del problema de John Milnor (2004)

  http://www.claymath.org/millennium/Poincare_Conjecture/poincare.pdf

5. APPROACHES THROUGH DIFFERENTIAL GEOMETRY AND DIFFERENTIAL EQUATIONS[7]

In recent years there have been several attacks on the geometrization problem (and hence on the Poincaré Conjecture) based on a study of the geometry of the infinite dimensional space consisting of all Riemannian metrics on a given smooth three-dimensional manifold.

One approach by Michael Anderson, based on ideas of Hidehiko Yamabe [53], studies the *total scalar curvature* $\iiint_{M^3} R\,dV$ as a functional on the space of all smooth unit volume Riemannian metrics. The critical points of this functional are the metrics of constant curvature (see [1]).

A different approach, initiated by Richard Hamilton studies the *Ricci flow* [15, 16, 17], that is, the solutions to the differential equation

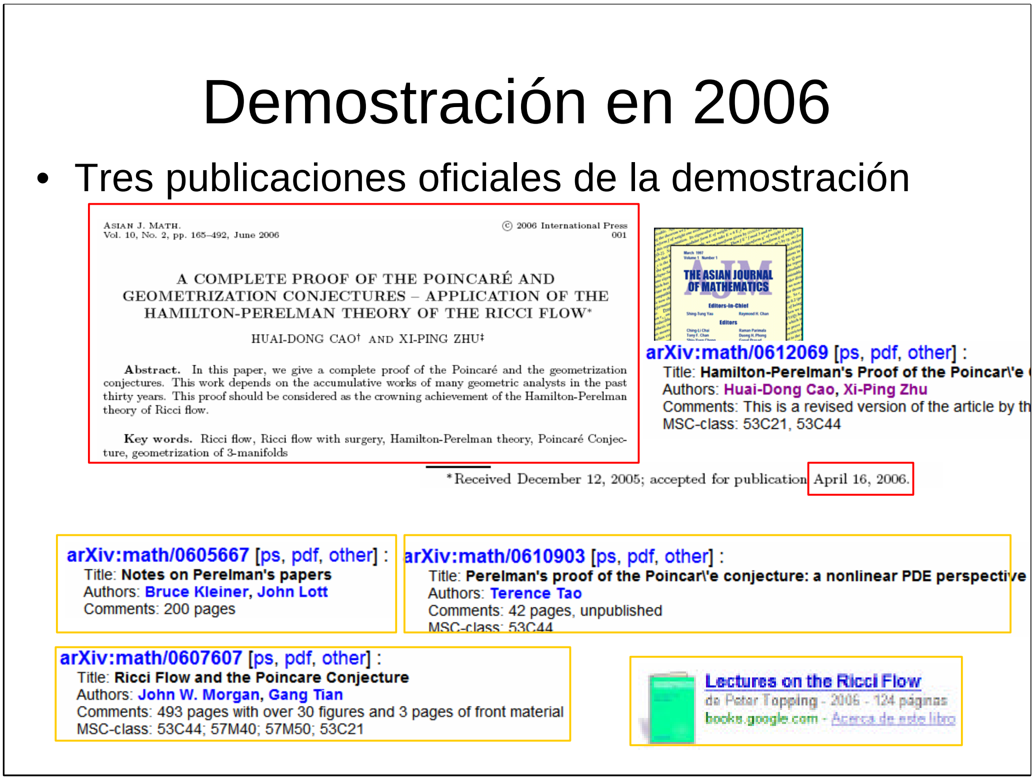
$$\boxed{\frac{dg_{ij}}{dt} = -2R_{ij}\,.}$$

If we start with a 3-manifold of positive Ricci curvature, Hamilton was able to carry out this program and construct a metric of constant curvature, thus solving a very special case of the Elliptization Conjecture. However, in the general case, there are very serious difficulties, since this flow may tend toward singularities.[8]

Milnor, en 2004, "da su brazo a torcer" y añade a la descripción oficial del premio Clay para la conjetura de Poincaré una referencia al trabajo de Poincaré. Pero para "no mojarse" lo menciona de forma general.

La aproximación geométrica basada en ecuaciones diferenciales (el llamado Análisis Geométrico) para la conjetura se inició con ideas de Yamabe, que ha desarrollado, sin éxito, Anderson.

Un camino alternativo, iniciado por Hamilton (con sugerencias de Yau) basado en la ecuación llamada flujo de Ricci parece prometedor, pero encuentra serias dificultades. La nota 8 es una referencia a los trabajos de Perelman, pero comenta que todavía están por verificar por parte de los expertos.

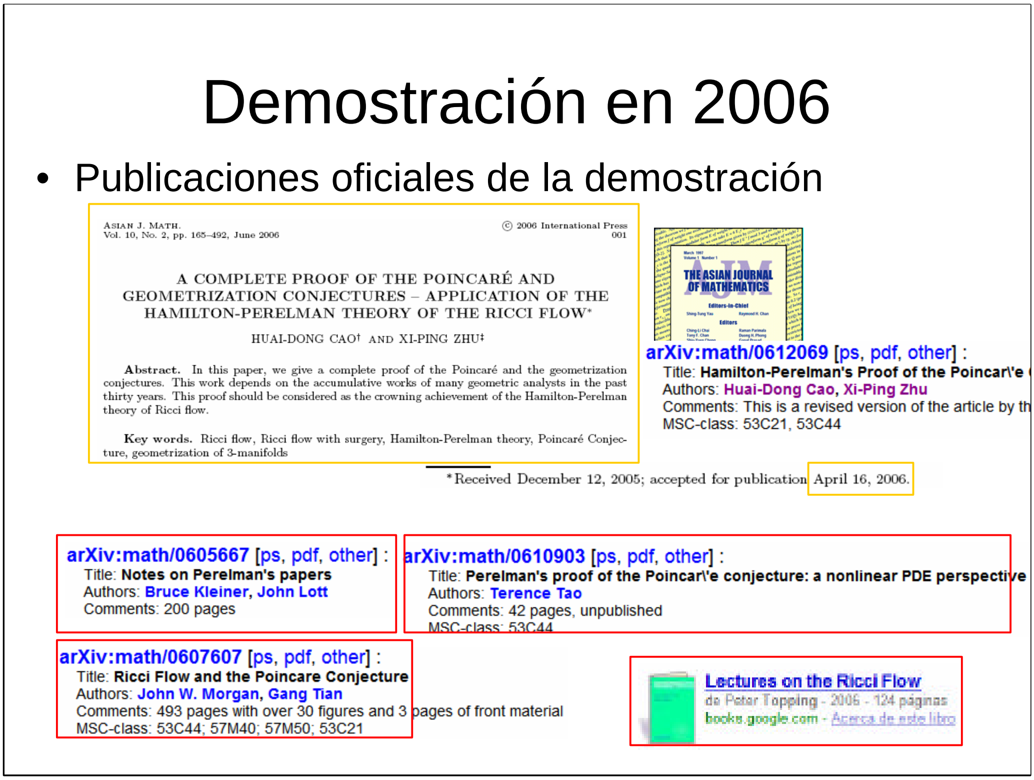


En 2006 finalmente los expertos publicaron tres demostraciones basadas en el trabajo de Perelman.

Dos chinos, Cao, alumno aventajado de Yau, experto en flujo de Ricci y colaborador de Hamilton, y un tal Zhu, publicaron en la revista "Asian Journal of Mathematics", cuyo editor principal es el propio Yau, y las malas lenguas dicen que el artículo no pasó por revisores, una demostración de las conjeturas de Poincaré y Thurston basadas en los trabajos de Hamilton y la demostración de Perelman. La parte de Poincaré sigue las ideas de Perelman. Sin embargo, la parte relativa a Thurston, ya que los autores dicen que no entienden esa parte del trabajo de Perelman, utiliza una técnica diferente a Perelman.

Este artículo es "precioso", toda una joya, y se entiende fácilmente. Merece la pena leerlo.

Se ha generado mucha polémica debido a un artículo de la periodista / escritora Silvia Nasar (la autora de "Una Mente Maravillosa" el libro sobre John F. Nash en el que se basa la película). Sin embargo, no comentaré nada sobre esta polémica que no es científica.

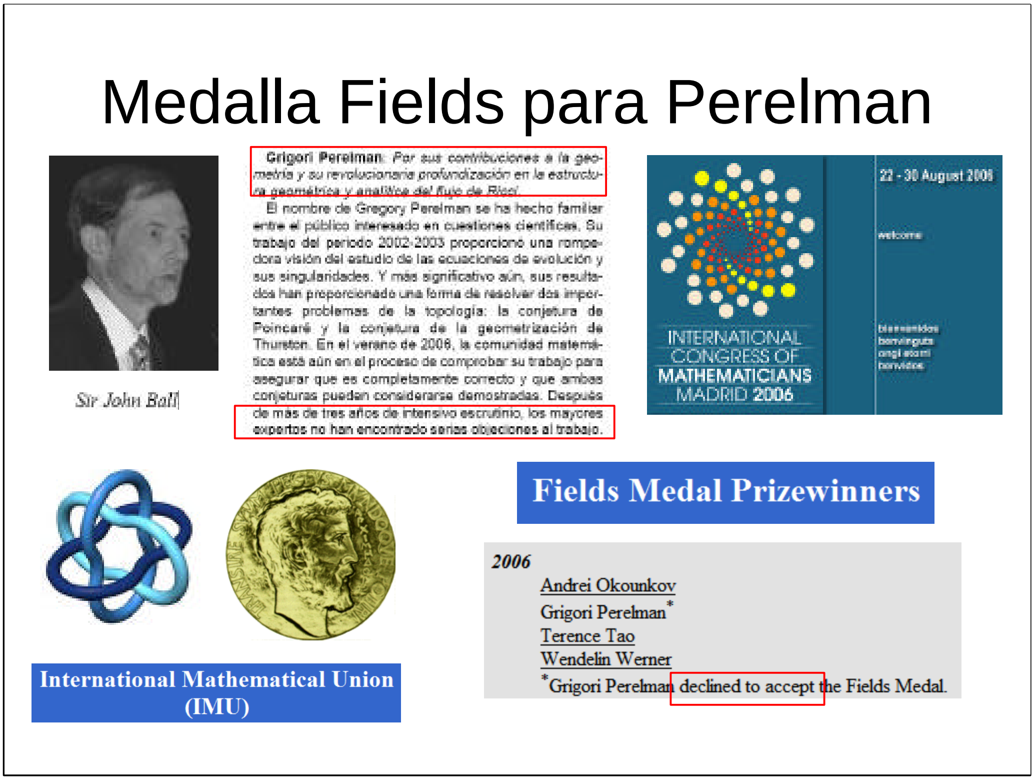


Kleiner y Lott, que habían abierto en junio de 2002 un grupo de noticias para que diferentes matemáticos de todo el mundo compartieran su "aprendizaje" de la demostración de Perelman, decidieron que ya habían "entendido" a Perelman, y que su demostración de ambas conjeturas es correcta, por lo que publicaron un documento con un resumen de lo debatido en el grupo de noticias. Este trabajo es difícil de entender, ya que al seguir muy fielmente a Perelman, está bastante desordenado.

Finalmente, Morgan junto con Tian (un gran matemático chino "competidor" de Yau) han escrito un libro que presenta solamente la demostración de la conjetura de Poincaré siguiendo las ideas de Perelman. El libro editado por el Instituto Clay es para graduados en matemáticas y se lee fácilmente.

Permitidme dos recomendaciones. Una lectura muy recomendable si se quiere aprender Flujo de Ricci es el libro de Topping "Lectures on Ricci Flow" disponible gratuitamente en Internet.

El artículo de Terence Tao, también medalla Fields en 2006, es precioso y nos ofrece muchas ideas muy interesantes sobre la demostración de la conjetura desde una perspectiva de ecuaciones diferenciales. Muy bonito y recomendable.



Como todos sabéis, Sir John Ball, presidente de la IMU, la Unión Internacional de Matemáticos, que concede las Medallas Fields (el equivalente al premio Nobel pero para matemáticos), anunció en el congreso ICM (congreso Internacional de Matemáticos, celebrado el año 2006 en Madrid, al que yo asistí) que Perelman había sido galardonado con la Medalla Fields.

Se le concedió a Perelman la medalla Fields no por la demostración de la conjetura si no por sus contribuciones a la geometría con énfasis en el análisis del flujo de Ricci.

Como ya sabéis por la prensa, Perelman declinó aceptar la medalla. Pocos aplaudieron su decisión en la Sala de Congresos, pero entre esos pocos me encontraba yo. No justificaré mi acción, pero, sinceramente, yo esperaba que no la aceptara.

Medalla Fields para Perelman

Sir John Ball

Grigori Perelman: *Por sus contribuciones a la geometría y su revolucionaria profundización en la estructura geométrica y analítica del flujo de Ricci.*

El nombre de Gregory Perelman se ha hecho familiar entre el público interesado en cuestiones científicas. Su trabajo del periodo 2002-2003 proporcionó una rompedora visión del estudio de las ecuaciones de evolución y sus singularidades. Y más significativo aún, sus resultados han proporcionado una forma de resolver dos importantes problemas de la topología: la conjetura de Poincaré y la conjetura de la geometrización de Thurston. En el verano de 2006, la comunidad matemática está aún en el proceso de comprobar su trabajo para asegurar que es completamente correcto y que ambas conjeturas puedan considerarse demostradas. Después de más de tres años de intensivo escrutinio, los mayores expertos no han encontrado serias objeciones al trabajo.

The King of Spain with Tao, Werner, Okounkov and Kleinberg

En España, la prensa le dio mucha publicidad al hecho de que Perelman "no quiso salir en la foto" junto con el Rey, aunque las "Autoridades" sí quisieron.

John Ball fue San Petersburgo en junio de 2006, en viaje "secreto", para tratar de convencer a Perelman, pero éste no dio su brazo a torcer:

Perelman resumió la conversación así: "Él me propuso tres alternativas: acepta y ven; acepta y no vengas, y te enviaremos la medalla luego; tercero, no aceptes ni vengas. Desde el principio le dije que había escogido la tercera."

Según Perelman: "el premio es completamente irrelevante para mí. Todo el mundo entiende que si la demostración es correcta entonces no se necesita ningún otro reconocimiento".[

La ceremonia y todas las conferencias plenarias fueron grabadas en video y estaban disponibles en Internet (no todas por algunos problemas técnicos) pero problemas "internos" entre la organización y la empresa encargada del vídeo hicieron que tras el congreso se eliminarán los enlaces correspondientes y hoy por hoy es imposible acceder a dichas imágenes. Una pena.

Esperemos que los historiadores de la matemática no hayan perdido para

Anuncio "oficial" de la demostración en Madrid 2006

Tue, 22 15:25 15:45	**Laudatio** Speaker: The work of Grigori Perelman PDF	John Lott, *University of Michigan, Ann Arbor, USA*

RICHARD HAMILTON

Richard Hamilton (Universidad de Columbia, Nueva York, EEUU) finalizó ayer su conferencia plenaria, la primera del ICM2006, diciendo que se sentía "increíble-

John Morgan (Columbia University, New York, USA, together with Gang Tian (Princeton University, USA), has written a book presenting a complete account of the proof of the Poincaré Conjecture based on Perelman's ideas.

La declaración de Hamilton al cierre de su charla podría entenderse como una confirmación de que finalmente la conjetura de Poincaré se ha demostrado. Hamilton es uno de los expertos no sólo que ha analizado el trabajo de Perleman, sino que ha desarrollado la herramienta que ha resultado central para el trabajo del matemático ruso –una técnica llamada 'flujo de Ricci'–.

Hamilton explicó que el trabajo de Perelman "es difícil de entender" y que el propio Perelman usa en algunos momentos el término "sketch". "Y un esbozo es una invitación a trabajar para completarlo, a buscar una manera de hacerlo mejore. Pero no hay ninguna voluntad de cri-

JOHN MORGAN: "IN 2003, PERELMAN SOLVED THE POINCARE CONJECTURE"

Escasos segundos después del comienzo de la conferencia, un aplauso sincero y unánime inundó la sala. John Morgan acababa de anunciar que Gregori Perelman había resuelto la conjetura de Poincaré. Esta

El tema estrella del congreso ICM 2006 de Madrid fue la demostración de Perelman.

John Lott hizo la exposición oficial de los motivos por los que Perelman había recibido el premio. La charla fue muy interesante e instructiva.

La primera charla plenaria fue de Richard Hamilton sobre los avances de Perelman en el tópico del flujo de Ricci. Su charla fue excesivamente técnica y difícil de entender. Como anécdota, "los dos indios que yo tenía al lado se durmieron durante la charla, uno de ellos, roncaba bastante."

Al día siguiente, la charla invitada de John Morgan comenzó con un clamoroso aplausa cuando Morgan afirmó que Perelman había demostrado la conjetura de Poincaré. Todos aplaudimos clamorosamente.

La charla de Morgan fue excesivamente divulgativa, más para la prensa que para un público de matemáticos. Prácticamente no dijo nada… pero lo contó de forma "bonita" y "agradable".

Anuncio "oficial" de la demostración en Madrid 2006

The experience I have had multiple times when reading Perelman is that I would read something and I wouldn't understand a word of it. Then I go home and think about it. If I didn't understand it I would talk to Tiang about it, to Hamilton... When I eventually understood it –hours later, days later, sometimes weeks later—I would ask myself, OK, if I had to explain its main points as a guide in one paragraph what would I do? So having had that experience over and over again and never finding that the paragraph that Perelman wrote deviated from an absolutely accurate if incredibly compressed description of the argument that I had understood to be completely correct, I conclude that Perelman had just decided for some reason to compress everything.

Is Perelman's proof complete?
I believe if you take all three papers by Perelman together they are 55 or 60 pages, and we wrote 473 pages. The first hundred pages were mostly background information and the rest was mostly unpacking and re-ordering what was contained in the 55 pages of Perelman.

John Morgan (Columbia University, New York, USA, together with Gang Tian (Princeton University, USA), has written a book presenting a complete account of the proof of the Poincaré Conjecture based on Perelman's ideas.

Have you met Perelman?
I met him when he made his tour to the United States in 2003, when he came to explain his ideas. I attended several of his lectures and then talked privately with him on several occasions, and after he went back to Russia I was in e-mail contact with him when I was struggling to understand his writings. And he was always very forthcoming and patient in explaining his ideas, so while he seems to be socially reclusive, in the mathematical context he was forthcoming and patient.

En una entrevista al boletín del noticias del congreso ICM 2006 de Madrid, John Morgan afirmó que el trabajo de Perelman es muy difícil de entender: "Muchas veces podía leer algo escrito por Perelman y no entender ni una palabra. Tras consultar con Tian, con Hamilton, incluso con Perelman, semanas más tarde, lograba entenderlo. Por alguna razón, Perelman decidió ponernoslo difícil a los demás matemáticos y codificó todo en un lenguaje críptico y extremadamente escueto."

Los trabajos de Perelman comprenden unas 60 páginas y su transcripción "descodificada" y correctamente ordenada, sólo para la conjetura de Poincaré, requiere más de 350 páginas.

¿Recibirá Perelman el millón de dólares del premio del Milenio?

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS MADRID 2006

CARLSON: "PERELMAN CUMPLE LOS REQUISITOS PARA EL PREMIO DEL MILENIO"

¿recibirá Grisha Perelman, como muchos han pronosticado, uno de los 'premios del Milenio'? La respuesta podría tenerla Jim Carlson, presidente del Instituto Clay de Matemáticas. Algo que nadie podría responder, sin embargo, es si Pereleman aceptará el premio si efectivamente le es concedido.

¿Quiere decir eso que Perelman será el próximo Premio del Milenio, el galardón otorgado por el Instituto Clay para quien resolviese alguno de los denominados "Problemas del Milenio"?

Las reglas del Instituto dicen que hay que esperar dos años desde que se publique el trabajo y haya una aceptación general por parte de la comunidad matemática.

¿Cree usted que lo aceptará?

Eso no lo puedo decir: no tengo ni idea. Nosotros procederemos exactamente igual que el ICM cuando le ha premiado con la Medalla Fields. Creo que John Ball y el comité de las medallas Fields lo han hecho perfectamente. Ellos le otorgaron la medalla basándose en sus logros, sin pensar en la posible reacción de Perelman. Si el Instituto Clay decide ofrecerle el Premio del Milenio a Perelman, seguirá la misma filosofía.

El Instituto Clay (Massachusetts, EE.UU.) fue fundado en 1999 por el empresario bostoniano Landon T. Clay.

La pregunta del año pasado en Madrid era : ¿recibirá Perelman el premio del millón del dólares? La respuesta de Carlson, el presidente del instituto Clay es afirmativa, salvo que se descubra un error de última hora, algo actualmente muy improbable.

Ahora la pregunta es : ¿aceptará Perelman el millón de dólares? Clarson dice que no tiene ni idea.

Mi opinón personal es que sí, que lo aceptará. El año que viene, tras el verano de 2008, sabremos finalmente la respuesta.