

# Flujo de Ricci-Hamilton



Francisco R. Villatoro  
Dept. Lenguajes y Ciencias de la Computación  
E.T.S.Ingenieros Industriales  
Universidad de Málaga

Málaga, 20 de abril de 2007



LENGUAJES Y  
CIENCIAS DE LA  
COMPUTACIÓN  
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

E.T.S. Ingenieros Industriales

Introduciremos el Flujo de Ricci, la herramienta matemática que ha permitido la Demostración de la Conjetura de Poincaré, y sus propiedades más importantes.

Esta charla será un poco matemática. Hay dos maneras de seguirla, quedarse sólo con las ideas o ver también las fórmulas y las ideas de cómo se han derivado.

# Serie de conferencias

## 1. Demostración de la conjetura

- Lunes 16 de abril (10:30)

## 2. Flujo de Ricci-Hamilton

- Viernes 20 de abril (10:00)

## 3. Solitones de Ricci y singularidades

- Lunes 23 de abril (10:30)

## 4. Aportaciones de Perelman

- Viernes 27 de abril (10:00)



Illustration by Robert Neubecker.

El ciclo de conferencias que hemos organizado Rafael Miranda y yo se ha dividido en dos partes con cuatro conferencias cada uno. Rafael ha introducido en las 4 charlas anteriores los fundamentos de topología y geometría necesarios para la segunda parte en la que nos centraremos en los resultados más recientes.

# Demostración de la conjetura

- Geometría y curvatura riemanniana
- Flujo de Ricci como ecua. derivadas parcial.
- Otras ecuaciones de curvatura
- Principio del máximo, existencia y unicidad
- Pinzamiento de Hamilton-Ivey

Los contenidos de esta charla son los siguientes: Presentaremos algunas ideas introductorias de geometría riemanniana, con énfasis en el concepto de curvatura. Nuestra idea es que se entienda qué representa el tensor de Ricci y su relación con la curvatura en variedades tridimensionales.

Seguidamente presentaremos la ecuación débilmente parabólica del flujo de Ricci, indicaremos por qué lo es y presentaremos un análisis dimensional de la misma.

Si la métricas sigue el flujo de Ricci, las demás magnitudes "geométricas" que dependen de ella siguen sus "propias" ecuaciones.

Indicaremos la idea del análisis de existencia y unicidad de soluciones del flujo de Ricci.

...

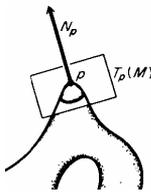
# Geometría riemanniana

- Espacio euclídeo: longitudes y ángulos medidos mediante un producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}. \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right)$$

- Un producto escalar general :  $\mathbf{B}$  es matriz simétrica

$$\mathbf{u}^T \mathbf{B} \mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} u^i u^j$$



**Definition 1.1.** Let  $M$  be an  $n$ -dimensional manifold. A *Riemannian metric*  $g$  on  $M$  is a smooth section of  $T^*M \otimes T^*M$  defining a positive definite symmetric bilinear form on  $T_p M$  for each  $p \in M$ . In local coordinates  $(x^1, \dots, x^n)$ , one has a natural local basis  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  for  $TM$ , where  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ . The metric tensor  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  is represented by a smooth matrix-valued function

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j).$$

The pair  $(M, g)$  is a *Riemannian manifold*. We denote by  $\langle g^{ij} \rangle$  the inverse of the matrix  $\langle g_{ij} \rangle$ .

En una variedad (superficie o hiper-superficie), la "forma" (distancias y ángulos) no es preservada ya que no tenemos ninguna manera de medir distancias y ángulos. En el plano (o el espacio) euclídeo medimos distancias y ángulos mediante un producto escalar (o interior) de vectores, que nos da el ángulo entre dos vectores y su magnitud (o longitud).

En general, un producto interior viene dado por un matriz simétrica. Como una variedad topológica es localmente euclídea ("plana") podemos "pensar" en introducir un producto interior en cada plano tangente y obtener un "campo" tensorial para la métrica.

Si la métrica es suave (infinitamente diferenciable, la variedad se ha dotado de una estructura llamada riemanniana, también decimos que la variedad es diferenciable.

La métrica permitirá medir longitudes de curvas en la variedad, áreas, volúmenes, ... así como ángulos entre curvas, y conceptos más complejos como la curvatura de la variedad.

# Geometría riemanniana

Riemannian geometry / *Manfredo do Carmo*

## 2. Riemannian Metrics

**2.1 DEFINITION.** A *Riemannian metric* (or *Riemannian structure*) on a differentiable manifold  $M$  is a correspondence which associates to each point  $p$  of  $M$  an inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (that is, a symmetric, bilinear, positive-definite form) on the tangent space  $T_p M$ , which varies differentiably in the following sense: If  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  is a system of coordinates around  $p$ , with  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  and  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , then  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  is a differentiable function on  $U$ .

curve  $c$  to a closed interval  $[a, b] \subset I$

$$l_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt$$

volume  $\text{vol}(R)$  of  $R$

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n$$

Una buena referencia para aprender geometría diferencial y riemanniana son los dos libros (con esos títulos) de *Manfredo do Carmo*.

La métrica es una matriz simétrica asociada a cada punto de la variedad que nos permite definir un "producto euclídeo" local en el plano tangente. Para ello tenemos que pre-multiplicar la matriz por un vector fila y post-multiplicar por un vector columna. ¿Dónde están estos vectores? Son los vectores tangentes a la variedad en el punto  $p$ . La métrica, por tanto, actúa sobre vectores (tangentes).

Supondremos que la métrica es suave (infinitamente diferenciable), por lo que la podremos derivar cuantas veces queramos.

La métrica permite definir longitudes de segmentos de curvas, aplicándola a los vectores tangente a la curva.

También, áreas y volúmenes de regiones de la variedad.

# Geometría riemanniana

## 2. Affine Connections

**2.1 DEFINITION.** An *affine connection*  $\nabla$  on a differentiable manifold  $M$  is a mapping

$$\nabla: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

which is denoted by  $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$  and which satisfies the following properties :

- i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$   $\nabla: \text{Vector Fields} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Vector Fields} \rightarrow \text{Vector Fields}$
  - ii)  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$   $\nabla(X \otimes Y) = \nabla_X(Y)$
  - iii)  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$
- in which  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  and  $f, g \in \mathcal{D}(M).$

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

vector field  $V$  along the differentiable curve  $c: I \rightarrow M$   
vector field  $\frac{DV}{dt}$  along  $c$ , called the covariant derivative of  $V$

$$V(t) = Y(c(t)), \text{ then } \underline{\frac{DV}{dt}} = \underline{\nabla_{dc/dt} Y}.$$

Para definir el concepto de curvatura debemos podernos "mover vectores" del plano tangente de un punto al plano tangente de otro punto cercano a esto. Para esto necesitamos alguna manera de desplazamiento ("paralelo") o de conexión (afín) entre campos vectoriales (funciones que nos dan un vector en cada punto de la variedad). La conexión afín debe actuar como una "derivación" (operador derivada) direccional, en la dirección del campo vectorial (que actúa como vectores de un espacio vectorial, donde los campos (funciones) escalares actúan como escalares en dicho espacio vectorial).

La definición, puntos (i)-(iii), es bastante "razonable" y cumple las propiedades de linealidad de un operador de derivada que uno espera.

Abajo izquierda observamos cómo se definen los coeficientes de Christoffel de la conexión afín. Estos coeficientes la representan cuando elegimos un sistema de coordenadas local concreto. Sus valores cambian cuando cambiamos el sistema de coordenadas.

La derivada de un vector (campo vectorial) a lo largo de una curva en la variedad se determina mediante la derivada covariante del campo vectorial, que no es más que una conexión afín en "la dirección" del vector tangente a la curva del campo vectorial "sobre" la curva.

# Geometría riemanniana

**3.2 PROPOSITION.** *Let  $M$  be a Riemannian manifold. A connection  $\nabla$  on  $M$  is compatible with a metric if and only if for any vector fields  $V$  and  $W$  along the differentiable curve  $c: I \rightarrow M$  we have*

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

**3.6 Theorem. (Levi-Civita).** *Given a Riemannian manifold  $M$ , there exists a unique affine connection  $\nabla$  on  $M$  satisfying the conditions:*

- a)  $\nabla$  is symmetric.
- b)  $\nabla$  is compatible with the Riemannian metric.

the functions  $\Gamma_{ij}^k$  defined on  $U$  by  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ , the coefficients of the connection  $\nabla$  on  $U$  or the Christoffel symbols of the connection. From (9) it follows that

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

Una variedad riemanniana con una métrica determinada puede soportar muchas conexiones afines, pero solamente existe una que sea simétrica y compatible con la métrica, como se indica en la expresión (3). La compatibilidad es un concepto natural que uno espera a una conexión afín "buena".

Aunque no detallaremos cómo se deriva, los coeficientes de Christoffel de la conexión afín de Levi-Civita (o asociada a la métrica) se pueden determinar de forma unívoca a partir de la métrica. Estos coeficientes nos dan un campo tensorial, con signatura (2,1), dos índices  $ij$  abajo y un índice  $k$  arriba.

Es habitual usar el convenio de Einstein, por que los sumatorios se omiten y se supone que existen donde haya términos con índices repetidos. Es decir, podríamos omitir el sumatorio en  $k$  y la expresión debería ser "inteligible".

# Curvatura riemanniana (Gauss)



Figure 1: 2D Curvature.

$$\kappa = 1/R$$

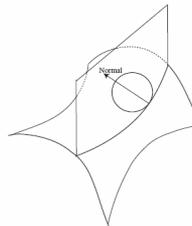


Figure 2: Curvature in 3D

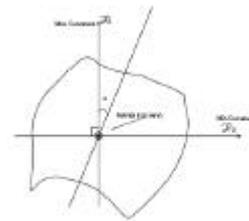


Figure 3: Curvature in 3D, top view

A *normal curve* is the intersection of a surface with a plane containing the normal  $n$ . For a given direction  $d$  in the tangent plane there is a unique normal curve, obtained by intersecting the plane spanned by  $n$  and  $d$  with the plane.

The curvature of a normal curve is called *sectional curvature*.

The *principal curvatures*  $(\kappa_1, \kappa_2)$  are the maximal and minimal sectional curvatures. The *principal curvature directions* are the directions in the tangent plane for which the maximum and minimum are attained. These directions are perpendicular to each other.

$$\kappa = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha \quad \text{Gaussian curvature} \quad \kappa_G = \kappa_1 \kappa_2$$

La curvatura "intrínseca" es un concepto complicado. Introducido por Gauss para superficies, fue generalizado por Riemann para hiper-superficies.

Una curva no tiene curvatura "intrínseca" sólo tiene curvatura "extrínseca". Desde "fuera" parece curvada, pero no lo está "desde dentro" en el sentido de que un sistema de coordenadas adecuadas puede "aplanar" la curva a una recta.

Para un superficie 2D sumergida en un espacio 3D, podemos hablar de su vector normal y considerar un plano que pasa por éste. La curvatura extrínseca de las curvas por las que corta este plano (que podemos rotar 360 grados), llamadas curvas normales, determinan lo que podemos llamar curvatura seccional.

Las curvaturas principales, la máxima y la mínima de todas las curvaturas seccionales, se encuentran en direcciones (vectores) ortogonales (perpendiculares) y permiten definir una magnitud "intrínseca" a la superficie, llamada curvatura de Gauss (su producto). Esta magnitud no cambia, como demostró Gauss, cuando cambio el sistema de coordenadas que describe la superficie.

# Curvatura riemanniana

## 2. Curvature

2.1 DEFINITION. The *curvature*  $R$  of a Riemannian manifold  $M$  is a correspondence that associates to every pair  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  a mapping  $R(X, Y): \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  given by

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

where  $\nabla$  is the Riemannian connection of  $M$ .

Observe that if  $M = \mathbb{R}^n$ , then  $R(X, Y)Z = 0$  for all  $X, Y, Z$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} - \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad R(X_i, X_j)X_k = \sum_{\ell} R_{ijk}^{\ell} X_{\ell}$$

As frequently happens in mathematics, a "workable" formulation of the concept of curvature required a long time for its development. When such a formulation finally appeared it had the advantage of being easy to use to prove theorems but it had the disadvantage of being so far removed from the initial intuitive concept that it looked as if it were some kind of arbitrary creation.

La curvatura "intrínseca" es un concepto complicado. Introducido por Gauss para superficies, fue generalizado por Riemann para hiper-superficies.

Las ideas geométricas tras el concepto de tensor de curvatura, que se basan en la idea de curvatura seccional, para aprovechar todo lo desarrollado por Gauss, se pierden fácilmente en la "maraña" del formalismo matemático, que, por otro lado, una vez que se domina, permite trabajar fácilmente sin necesidad de preocuparse por tratar de "visualizar" lo que representa la curvatura intrínseca.

Formalmente, el tensor de curvatura es una aplicación entre campos vectoriales parametrizada por dos campos vectoriales dados. Su expresión matemática se basa en el uso de la conexión afín asociada a la métrica y toma la forma que observamos en coordenadas locales.

No entraremos en tratar de justificar esta expresión en detalle...

# Curvatura riemanniana

**Definition 1.5.** The *sectional curvature* of a 2-plane  $P \subset T_pM$  is defined as

$$K(P) = \mathcal{R}(X, Y, X, Y),$$

where  $\{X, Y\}$  is an orthonormal basis of  $P$ . We say that  $(M, g)$  has *positive sectional curvature* (resp., *negative sectional curvature*) if  $K(P) > 0$  (resp.,  $K(P) < 0$ ) for every 2-plane  $P$ . There are analogous notions of non-negative and non-positive sectional curvature.

In local coordinates, suppose that  $X = X^i \partial_i$  and  $Y = Y^i \partial_i$ . Then we have

$$K(P) = R_{ijkl} X^i Y^j X^k Y^l.$$

A riemannian manifold is said to have *constant sectional curvature* if  $K(P)$  is the same for all  $p \in M$  and all two-planes  $P \subset T_pM$ . One can show that a manifold  $(M, g)$  has constant sectional curvature  $\lambda$  if and only if

$$R_{ijkl} = \lambda(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Of course, the sphere of radius  $r$  in  $\mathbb{R}^n$  has constant sectional curvature  $1/r^2$

Sin embargo, no me resisto a hacer un comentario sobre su conexión con la curvatura Gaussiana. Ésta última se basa en la curvatura extrínseca de curvas en planos perpendiculares al plano tangente de la superficie (2D). Riemann generaliza este concepto considerando que el espacio tangente de una hiper-superficie 3D que tiene 3 componentes se puede describir como 3 elecciones diferentes de planos (vectores unitarios de una base, sean 12, 13, 23) y construye un concepto que nos permite recuperar para un plano dado (sea el 13, p.ej.) el concepto de curvatura de Gauss, la llamada curvatura seccional del plano.

La idea es sencilla en el plano 2D elegido en el espacio tangente, tomamos la "aproximación" a la variedad dada por todas las geodésicas a ésta que tienen como vectores tangente los vectores de este plano 2D en el punto considerado. Todas estas geodésicas tienen una envolvente que "conforma" una superficie 2D a la que podemos aplicar los conceptos gaussianos de curvatura. La curvatura resultante es la curvatura seccional para dicho plano. La compatibilidad del tensor de curvatura de Riemann con la curvatura gaussiana es completa.

Para el flujo de Ricci, como veremos, las variedades de curvatura seccional constante surgen múltiples veces, para ellas el tensor de curvatura toma una forma especialmente sencilla.

# Tensores de Curvatura

Levi-Civita connection  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$

Riemannian curvature tensor  $R_{ijl}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{il}^p$

$R_{ijkl} = g_{kp} R_{ijl}^p$   $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$

Bianchi identity  $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$

Ricci tensor is the contraction  $R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}$

scalar curvature  $R = g^{ij} R_{ij}$ .

**Ricci flow of Hamilton**

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

En 1 dimensión, el tensor de curvatura se anula, indicando que las curvas no tienen curvatura intrínseca.

En 2 dimensiones, el tensor de curvatura que debe dar el mismo resultado que la curvatura de Gauss queda completamente determinado dando un solo número.

En 3 dimensiones, el tensor de curvatura  $R_{ijkl}$  que es antisimétrica en  $ij$  es decir  $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ , y en  $kl$ , pero que es simétrico por parejas de índices  $R_{(ij)(kl)} = R_{(kl)(ij)}$ , luego se puede interpretar como una matriz simétrica de  $3 \times 3$  con índices "dobles" 12, 13, 23 (en lugar 1, 2, 3). Ello indica que tiene los mismos grados de libertad que una matriz de  $3 \times 3$ .

Por todo ello podemos introducir dos magnitudes complementarias que son útiles en dimensión baja. El tensor de Ricci, que es una matriz  $3 \times 3$  simétrica, como la métrica. Y la curvatura escalar. Para ello usaremos contracciones de índices (multiplicaciones por la inversa de la métrica).

En 2 dimensiones,  $R$ , el escalar de curvatura determina unívocamente los tensores de Ricci y Riemann. La curvatura escalar contiene toda la información de curvatura.

# Curvatura de Riemann

- Tensor de curvatura de Ricci

$$Ric(X, Y) = Ric_g(X, Y) = g^{kl} R(X, \partial_k, Y, \partial_l).$$

$$Ric = Ric_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad Ric_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j).$$

- Escalar de curvatura

$$R = R_g = \text{tr}_g Ric = g^{ij} Ric_{ij}.$$

- R determina Ric y Riemann en n=2
- Ric determina Riemann en n=3
- Riemann es necesario sólo en n>3

A partir del tensor de Riemann podemos obtener, mediante un promediado adecuado de las curvaturas seccionales, el tensor de Ricci, que en coordenadas explícitas se obtiene por contracción de índices. El tensor de Ricci es una matriz que tendrán n autovalores (3 en tres dimensiones). Promediando todas las curvaturas seccionales en un punto, lo que se dice en coordenadas por contracción de los índices del tensor de Ricci, se obtiene el escalar de curvatura R.

En dos dimensiones la curvatura escalar caracteriza (darla especifica de forma unívoca) el tensor de Ricci y el de Riemann. En tres dimensiones el tensor de Ricci especifica de forma única el tensor de Riemann. En cuatro y más dimensiones son necesarios los tres tensores.

# Programa de Hamilton-Yau

- Ecuación del flujo de Ricci (el volumen decrece)

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}(g)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \Delta g_{ij} + \text{lower order terms}$$

(operador Laplace-Beltrami)

- Ecuación del flujo de Ricci normalizado (volumen const.)

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\operatorname{Ric} + \frac{R}{2} g$$

La idea es sencilla y nos lleva a una analogía con la ecuación del calor. La ecuación del calor “homogeiniza” la distribución de temperatura en un dominio. Veamos tres ejemplos de distribuciones de calor que conducen al mismo resultado. Hamilton buscó una ecuación que hiciera lo mismo para la curvatura, en la que la curvatura se comportara como el calor. De esta manera, partiendo de una métrica aplicada a una variedad (compacta y no orientable, recuerdese) si tuviéramos una ecuación que evolucione la curvatura llevandola a alcanzar un equilibrio en el que la curvatura sea constante, podríamos demostrar la conjetura de eliptización de Thurston y con ella la conjetura de Poincaré.

En general tendremos una ecuación como la siguiente, donde el funcional debe depender de la curvatura y la ecuación debe parecerse a una ecuación del calor (técnicamente una ecuación parabólica). Hamilton descubrió que la ecuación llamada flujo de Ricci cumplía con estas condiciones. Hemos de recalcar que el 2 es un factor de conveniencia, aparecen muchos 1/2 en los cálculos, pero el signo menos es muy importante. Si ponemos el signo más, la ecuación resultante se parece a la ecuación del calor con el tiempo hacia atrás, ecuación que no tiene solución única.

# Ecuación débilmente parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{ij} \partial_i \partial_j u + b_i \partial_i u + cu \quad \text{parabolic if } a_{ij} \text{ is uniformly positive definite}$$

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

Consider the Laplace Beltrami operator

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) & g^{ij} \xi_i \xi_j &= |\xi|^2 > 0. \\ &= g^{ij} \partial_i \partial_j + \text{lower order terms} \end{aligned}$$

*nonlinear PDE* *parabolic* if the *linearisation* is *parabolic*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(v) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = [DP(w)] v$$

Una ecuación es parabólica si la forma cuadrática que multiplica a sus segundas derivadas es definida positiva. Es decir, si la parte espacial (si el tiempo) es elíptica.

Por ejemplo, el operador de Laplace-Beltrami, la generalización del laplaciano a una métrica, es un operador elíptico.

Para una EDP no lineal, debemos linealizarla, y estudiar si la linealización es o no parabólica. Puede serlo en función de ciertos parámetros.

Eso le pasa al flujo de Ricci que es débilmente parabólico porque la forma "cuadrática" linealizada es semi-definida positiva (tiene un autovalor cero y el resto positivos). Es un problema a la hora de estudiar la teoría de existencia y unicidad de soluciones que se complica un poquito. Aunque no es un gran problema para la demostración de la Conjetura de Poincaré, es de hecho casi una ecuación del "calor" para la curvatura.

# Análisis dimensional

$$\Gamma = O(g^{-1}\partial g)$$

$$\text{Riem, Ric} = O(g^{-1}\partial^2 g) + O(g^{-2}(\partial g)(\partial g))$$

$$R = O(g^{-2}\partial^2 g) + O(g^{-3}(\partial g)(\partial g)).$$

$$\text{Laplace-Beltrami operator } \Delta_g f = O(g^{-1}\partial^2 f) + O(g^{-2}(\partial g)(\partial f)).$$

$$\text{Ricci flow equation } \partial_t g = O(g^{-1}\partial^2 g) + O(g^{-2}(\partial g)(\partial g))$$

where the lead term  $O(g^{-1}\partial^2 g)$  is not elliptic.

This is not a manifestly parabolic equation.

PERELMAN'S PROOF OF THE POINCARÉ CONJECTURE: A  
NONLINEAR PDE PERSPECTIVE

TERENCE TAO

Terence Tao, medalla Fields en 2006 junto con Perelman, ha escrito un artículo muy bueno sobre la teoría de EDP en la demostración. Es muy recomendable.

Tao presenta de una manera muy sencilla, mediante análisis dimensional, el hecho de que el flujo de Ricci no es parabólico. Ya que para  $g=0$  no está bien definido. Nótese que ello no causa problema en el operador de Laplace-Beltrami, que actúa sobre  $f$  no sobre  $g$ .

No entraremos en más detalles.

# Solución Flujo de Ricci

## Einstein metrics

$$R_{ij}(x, 0) = \lambda g_{ij}(x, 0), \quad \forall x \in M \quad R_{ij}(x, t) = R_{ij}(x, 0) = \lambda g_{ij}(x, 0)$$

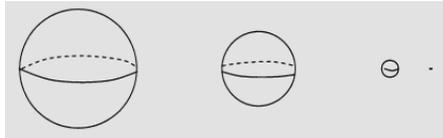
$$\boxed{\lambda > 0} \quad g_{ij}(x, t) = \rho^2(t) g_{ij}(x, 0)$$

$$\frac{\partial(\rho^2(t) g_{ij}(x, 0))}{\partial t} = -2\lambda g_{ij}(x, 0)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho}, \quad \rho^2(t) = 1 - 2\lambda t.$$

metric  $g_{ij}(x, t)$  shrinks homothetically to a point as  $t \rightarrow T = 1/2\lambda$   
as  $t \rightarrow T$ , the scalar curvature becomes infinite like  $1/(T - t)$ .

- Solución "explota" en tiempo finito (blow-up)



Las soluciones más sencillas para el flujo de Ricci son para las llamadas métricas de Einstein, en las que el tensor de Ricci es proporcional a la métrica con una constante, sea lambda.

Para lambda positiva, la EDO de primer orden que se obtiene se resuelve fácilmente conduciendo a una métrica que se contrae (colapsa) hasta un punto en un tiempo finito (blow-up) lo que produce una singularidad en la curvatura que crece sin cota, hasta infinito, conforme nos acercamos al momento de la explosión.

La figura ilustra el colapso de una esfera.

Es importante notar que esta solución es "anciana" puede ser evolucionada con el flujo hacia atrás en el tiempo hasta tiempo menos infinito.

# Solución Flujo de Ricci

## Einstein metrics

$$\boxed{R_{ij}(x, 0) = -\lambda g_{ij}(x, 0)} \quad \forall x \in M$$

$$\lambda < 0 \quad g_{ij}(x, t) = \rho^2(t)g_{ij}(x, 0)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \rho^2(t) = 1 + 2\lambda t.$$

metric  $g_{ij}(x, t)$  exists and expands homothetically for all times,

and the curvature will fall back to zero like  $-1/t$

evolving metric  $g_{ij}(x, t)$  only goes back in time to  $-1/2\lambda$ ,

the metric explodes out of a single point in a "big bang".

- Solución ha "explotado" en el "pasado"

Para una métrica de Einstein con parámetro lambda negativo, la solución existe para todo tiempo y se expande con una escalado proporcional (homotecia) con una curvatura que decae hacia cero armónicamente.

Esta solución no es "anciana" ya que no podemos evolucionarla hacia el pasado, ya que encontramos una explosión (tipo big bang).

Las soluciones que veremos el próximo lunes para el estudio de singularidades son como la anterior, explotan en el futuro pero eran buenas soluciones en el pasado, se las llama soluciones "ancianas". Pero esto lo veremos en más detalle el lunes próximo cuando estudiemos los solitones del flujo de Ricci.

# Existencia-Unicidad de Solución

THEOREM 1.2.2 (Hamilton [58], De Turck [43]). *Let  $(M, g_{ij}(x))$  be a compact Riemannian manifold. Then there exists a constant  $T > 0$  such that the initial value problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(x, t) = -2R_{ij}(x, t) \\ g_{ij}(x, 0) = g_{ij}(x) \end{cases}$$

*has a unique smooth solution  $g_{ij}(x, t)$  on  $M \times [0, T]$ .*

Hamilton [16], uses the Nash-Moser iteration method to compensate for the lack of smoothing present in the equation. The second approach, due to de Turck [14], is a "gauge fixing" approach, taking advantage of the geometric nature of the Ricci flow, which in practical terms creates the "gauge invariance" formed by diffeomorphisms of the manifold (i.e. changes of coordinates).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(x, t) = -2R_{ij}(x, t) + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i, \\ g_{ij}(x, 0) = g_{ij}^o(x), \end{cases} \quad V_i = g_{ik} g^{jl} (\Gamma_{jl}^k - \overset{o}{\Gamma}_{jl}^k),$$

$\partial_t g = \Delta_g g + O(g^{-2}(\partial g)(\partial g)).$   
obviously a parabolic equation

Para usar una EDP en una demostración matemático es necesario estudiar el problema de existencia y unicidad de soluciones primero.

Hamilton resolvió la cuestión en 1982 utilizando una iteración de Nash-Moser (Nash el de la mente maravillosa) debido a que es una ecuación débilmente parabólica. Sin embargo, su demostración es complicada.

De Turck demostró meses más tarde que con una transformación "gauge" (de simetría local), una especie de cambio de variables en el espacio de todas las métricas... con una transformación adecuada se puede transformar la ecuación en una ecuación parabólica. Esta ecuación parabólica tiene una teoría de existencia y unicidad local muy sencilla de estudiar.

Sin entrar en detalles, mostramos el resultado para una cambio gauge general con un campo vectorial  $V$  y el caso particular de campo que conduce a una ecuación parabólica.

Existencia y unicidad locales (en tiempo pequeño) no implican nada del comportamiento de las soluciones a largo plazo. De hecho, el flujo de Ricci puede generar singularidades en tiempo finito, luego la solución existe sólo durante un intervalo finito  $[0, T]$  en lugar de  $[0, \infty)$ .

# Evolución de las Curvaturas

PROPOSITION 1.3.1 (Hamilton [58]). *Under the Ricci flow (1.1.5), the curvature tensor satisfies the evolution equation*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &\quad - g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql}) \end{aligned}$$

where  $B_{ijkl} = g^{pr}g^{qs}R_{piqj}R_{rksl}$  and  $\Delta$  is the Laplacian with respect to the evolving metric.

*Proof.* Choose  $\{x^1, \dots, x^m\}$  to be a normal coordinate system at a fixed point. At this point, we compute

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jl}^h &= \frac{1}{2} g^{hm} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{lm} \right) + \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{jm} \right) - \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} g^{hm} (\nabla_j (-2R_{lm}) + \nabla_l (-2R_{jm}) - \nabla_m (-2R_{jl})), \\ \frac{\partial}{\partial t} R_{ijl}^h &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jl}^h \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{il}^h \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} &= g_{hk} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijl}^h + \frac{\partial g_{hk}}{\partial t} R_{ijl}^h. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_m = \Delta R_m + R_m * R_m.$$

En el estudio de las soluciones del flujo de Ricci es importante conocer el comportamiento de todas las curvaturas y demás magnitudes geométricas que dependen de la métrica.

Aquí presentamos la ecuación para el tensor de curvatura y la parte inicial de su derivación. Falta la parte de inserción del tensor  $Bijkl$ , que no detallamos por ser un poco más engorrosa.

En el recuadro se ve el resumen de la ecuación, que es realmente lo que necesitamos, la ecuación es una "ecuación del calor" con una no linealidad cuadrática.

# Evolución de las Curvaturas

COROLLARY 1.3.2. *The Ricci curvature satisfies the evolution equation*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} - 2g^{pq} R_{pi} R_{qk}.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ik} &= g^{jl} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} + \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{jl} \right) R_{ijkl} \\ &= g^{jl} [\Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &\quad - g^{pq} (R_{pjkl} R_{qi} + R_{ipkl} R_{qj} + R_{ijpl} R_{qk} + R_{ijkp} R_{ql})] \\ &\quad - g^{jp} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{pq} \right) g^{ql} R_{ijkl} \\ &= \Delta R_{ik} + \boxed{2g^{jl} (B_{ijkl} - 2B_{ijlk})} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} \\ &\quad - 2g^{pq} R_{pk} R_{qi}. \end{aligned}$$

También podemos escribir una ecuación para el tensor de Ricci y la parte inicial de su derivación sólo falta demostrar que lo recuadrado para el tensor  $B_{ijkl}$  es exactamente cero.

Esta ecuación es más "complicada" que la anterior y que la siguiente para la curvatura escalar, y se usa menos en el estudio del flujo de Ricci.

# Evolución de las Curvaturas

COROLLARY 1.3.3. *The scalar curvature satisfies the evolution equation*

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} &= g^{ik} \frac{\partial R_{ik}}{\partial t} + \left( -g^{ip} \frac{\partial g_{pq}}{\partial t} g^{qk} \right) R_{ik} \\ &= g^{ik} (\Delta R_{ik} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} - 2g^{pq} R_{pi} R_{qk}) + 2R_{pq} R_{ik} g^{ip} g^{qk} \\ &= \Delta R + 2|\text{Ric}|^2.\end{aligned}$$

- Principio "débil" del máximo (ec. parabólica)

PROPOSITION 2.1.2. *If the scalar curvature  $R$  of the solution  $g_{ij}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , to the Ricci flow is nonnegative at  $t = 0$ , then it remains so on  $0 \leq t \leq T$ .*

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2 \geq \Delta R.$$

Finalmente, la ecuación para la curvatura escalar, que de nuevo es una ecuación "del calor" con términos cuadráticos pero que dependen de la norma del tensor de Ricci al cuadrado y no directamente de la curvatura escalar.

De todas formas esta ecuación nos permite acotar la curvatura escalar.

En las ecuaciones parabólicas se cumple el llamado principio del máximo que nos dice grosso modo que en un dominio los valores máximos y mínimos de la solución están el contorno del dominio.

Aplicado a la ecuación anterior obtenemos un principio del máximo para la curvatura escalar que es un principio de máximo "débil" para el flujo de Ricci. Si la curvatura escalar es no negativa en  $t=0$ , seguirá siéndolo mientras la solución no explote (en  $T$ ).

# Evolución de las Curvaturas

- Principio del máximo

$$\text{if } R_{\min}(0) > 0, \quad R_{\min}(t) \geq \frac{1}{R_{\min}(0)^{-1} - \frac{2}{3}t}$$

**Theorem 4.** *Let  $M$  be a 3-dimensional compact manifold with a Riemannian metric of strictly positive Ricci curvature. Then  $M$  has a Riemannian metric of constant strictly positive sectional curvature.*

**Remark 5.** *By a classical result,  $M$  is then isometric to a finite quotient of the round  $S^3$ . One says that  $M$  is a spherical manifold. If  $M$  is simply connected,  $M$  is diffeomorphic to  $S^3$ . This is the first step on the way to the Poincaré conjecture.*

Un principio del máximo "fuerte" para el flujo de Ricci es más elaborado y sólo presentaremos cómo se particulariza para el mínimo de la curvatura escalar que es la expresión que aparece arriba.

Este resultado permite demostrar (Hamilton 1982) que una variedad con curvatura escalar positiva estricta (todos los autovalores del tensor de Ricci son positivos, es decir, todas las curvaturas seccionales) ante el flujo de Ricci colapsa a un punto (igual que una esfera) por lo que puede ser dotada de una métrica de curvatura positiva igual a 1, es decir, es difeomorfa a una esfera. Es una esfera.

Esto es un caso particular de la conjetura de Poincaré y fue el primer gran paso que hizo pensar que con el flujo de Ricci se podría demostrar la conjetura.

# Pinzamiento de Hamilton-Ivey

**2.4. Hamilton-Ivey Curvature Pinching Estimate.** The Hamilton-Ivey curvature pinching estimate roughly says that if a solution to the Ricci flow on a three-manifold becomes singular (i.e., the curvature goes to infinity) as time  $t$  approaches the maximal time  $T$ , then the most negative sectional curvature will be small compared to the most positive sectional curvature.

**Hamilton-Ivey pinching estimate** THEOREM 2.4.1 (Hamilton [63], Ivey [73]).

Assume at  $t = 0$  the eigenvalues  $\lambda \geq \mu \geq \nu \geq -1$ .

$$R \geq (-\nu)[\log(-\nu) - 3], \quad \text{whenever } \nu < 0.$$

## • Autovalores del tensor de Ricci

eigenvalues  $\lambda \geq \mu \geq \nu$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix}$$

The scalar curvature  $R = \lambda + \mu + \nu$

ODE corresponding to PDE

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\lambda = \lambda^2 + \mu\nu, \\ \frac{d}{dt}\mu = \mu^2 + \lambda\nu, & \frac{d}{dt}(\lambda + \mu + \nu) \geq 0. \\ \frac{d}{dt}\nu = \nu^2 + \lambda\mu. \end{cases}$$

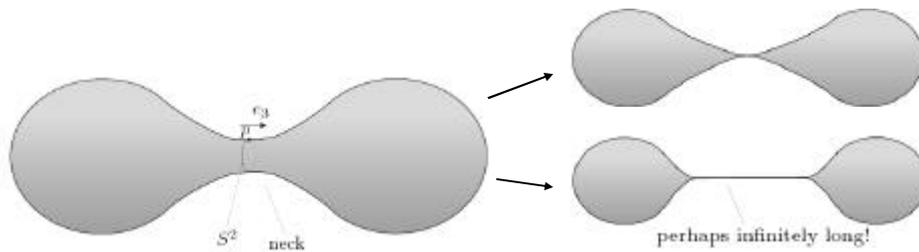
Podemos obtener ecuaciones de evolución para muchas magnitudes que dependen de la métrica como el volumen, longitudes de curvas, etc. Y para los autovalores del tensor de Ricci que están relacionados con las curvaturas seccionales de la variedad.

Ordenemos los autovalores de mayor a menor. La curvatura escalar es la traza del tensor de Ricci (suma de los autovalores).

Podemos obtener un sistema de 3 EDO para la evolución temporal de los autovalores. Utilizando estas ecuaciones es fácil demostrar el teorema precedente utilizando el llamado teorema de pinzamiento de la curvatura de Hamilton-Ivey. Este teorema requiere extender el principio del máximo a tensores arbitrarios dependientes de la métrica. No entraremos en los detalles técnicos que son complicados. Pero la idea es sencilla.

Mientras la solución se va volviendo singular (curvatura infinita positiva), la parte de curvatura negativa crece pero más lentamente con lo que se puede considerar pequeña comparada con la curvatura positiva. Este resultado que puede ser difícil de entender se explica gráficamente en la siguiente figura.

# Pinzamiento de Hamilton-Ivey



$$\text{Ric}(e_1, e_1) = K_{e_1 \wedge e_2} + K_{e_1 \wedge e_3} = \text{very positive}$$

$$\text{Ric}(e_2, e_2) = K_{e_2 \wedge e_1} + K_{e_2 \wedge e_3} = \text{very positive}$$

$$\text{Ric}(e_3, e_3) = K_{e_3 \wedge e_1} + K_{e_3 \wedge e_2} = \text{slightly negative}$$

To control  $|Rm|$  in dimension 3, it suffices to bound  $R$  from above. I.e., if  $R \leq C$ , then  $|Rm| \leq C$ .  
(Since  $R \leq C$  implies  $|\nu| \leq C$  which implies  $|Rm| \leq C$ .)

Vemos una ilustración del teorema del pinzamiento de forma gráfica. La importancia del teorema del máximo en tensores bajo flujo de Ricci es que acotaciones en la curvatura escalar nos da automáticamente acotaciones en el tensor de curvatura aquí llamado  $Rm$ .

El teorema no nos dice exactamente qué métrica se obtiene cuando la curvatura se vuelve infinito. ¿Se vuelve infinito sólo en un punto? ¿En un segmento? Estudiaremos las posibles soluciones en la singularidad en la próxima charla.

# Zoom de las soluciones

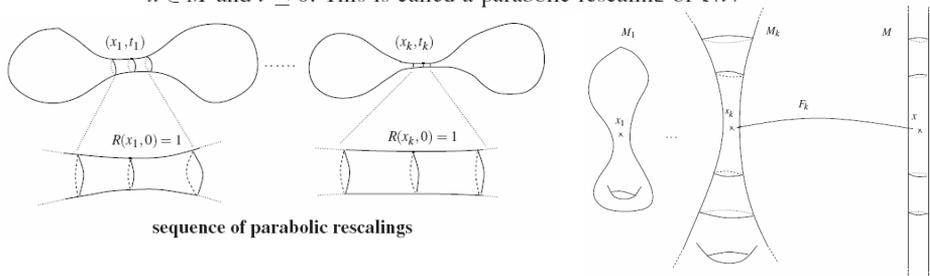
- Reescalado parabólico del flujo de Ricci

$$h(t) = \lambda^2 g(\lambda^{-2}t)$$

More precisely, let  $g(t)$  be a Ricci flow on  $M \times [0, T)$ ,  $x_0 \in M$ ,  $t_0 \in [0, T)$  such that  $R(x, t) \leq Q_0 \equiv R(x_0, t_0)$  for all  $x \in M$  and  $t \leq t_0$ . Then

$$g_0(t) = Q_0 g\left(t_0 + \frac{t}{Q_0}\right)$$

is a Ricci flow on  $[-t_0 Q_0, (T - t_0) Q_0]$  and  $R_0(x, t) \leq 1$  for any  $x \in M$  and  $t \leq 0$ . This is called a parabolic rescaling of  $g(t)$



Para analizar adecuadamente qué pasa durante la generación de la singularidad, la idea introducida por Hamilton fue el re-escalar el flujo para hacer un zoom de la singularidad. Ello simplifica la topología y métrica y descripción matemática de la variedad cerca del punto que alcanza curvatura infinito y permite su análisis simplificado como veremos en la próxima charla.

El re-escalado que vemos es típico de las ecuaciones parabólicas (del calor).

Como vemos al ampliar el cuello, la curvatura negativa se reduce a cero y la positiva crece hacia infinito.

Con esto vamos a acabar por hoy. Faltaría comentar algunas acotaciones para las derivadas de la curvatura escalar, tensor de Ricci y Riemann, que son necesarias en la demostración, pero no las presentaremos por brevedad

En la próxima charla hablemos de solitones de Flujo de Ricci y singularidades.