

Solitones del Flujo de Ricci y Formación de Singularidades

Science
23 December 2006 | 911

Breakthrough
of the Year



The
Poincaré
Conjecture
PROVED

AAAS

Francisco R. Villatoro

Dept. Lenguajes y Ciencias de la Computación

E.T.S.Ingenieros Industriales

Universidad de Málaga

Málaga, 23 de abril de 2007



LENGUAJES Y
CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

E.T.S. Ingenieros Industriales

En la tercera charla vamos a tratar la manera en la que el flujo de ricci genera singularidades y cómo dichas singularidades son tipos muy especiales de soluciones llamadas solitones de ricci.

Serie de conferencias

1. Demostración de la con

- Lunes 16 de abril (10:30)

2. Flujo de Ricci-Hamilton

- Viernes 20 de abril (10:00)

3. Solitones de Ricci y singularidades

- Lunes 23 de abril (10:30)

4. Aportaciones de Perelman

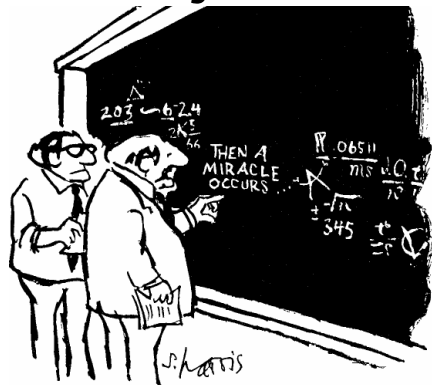
- Viernes 27 de abril (10:00)



El ciclo de conferencias que hemos organizado Rafael Miranda y yo se ha dividido en dos partes con cuatro conferencias cada uno. Rafael ha introducido en las 4 charlas anteriores los fundamentos de topología y geometría necesarios para la segunda parte en la que nos centraremos en los resultados más recientes.

Demostración de la conjetura

- Solitones en general
- Blow-up en general
- Solitones de Ricci
- Tipos y modelos de singularidades
- Soluciones ancianas



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

Los contenidos de esta charla son los siguientes: Presentaremos lo que son soluciones de tipo solitón en ecuaciones parabólicas en general. También el proceso de explosión de soluciones en este caso.

Luego estudiaremos lo que son los solitones del flujo de Ricci.

Presentaremos el trabajo de Hamilton en clasificación de los tipos de singularidades posibles y de sus modelos.

Finalmente introduciremos ideas de Perelman sobre kappa-soluciones, soluciones ancianas y una clasificación más "fina" de las posibles singularidades. Más detalles sobre las aportaciones de Perelman y el flujo de Ricci con cirugía serán para la próxima charla.

Ondas solitarias o "solitones"

- Soluciones auto-semejantes

$$u = B\tau^\mu U(\xi/A\tau^\lambda) \quad u = u_0(\tau)U(\xi/\xi_0(\tau)).$$

- Ondas solitarias (travelling wave solutions)

$$v = V(x - X(t)) + V_0(t). \quad v = V(x - \lambda t + c).$$

$$v = \ln u, \quad t = \ln \tau, \quad V_0(t) = \ln u_0(\tau), \\ V = \ln U, \quad x = \ln \xi, \quad X(t) = \ln \xi_0(\tau),$$

- Un ejemplo "sencillo"

$$\phi_t - a\phi_{xx} + b\phi^n = 0, \quad n = 2 \text{ and } a = b = 1.$$

$$\phi(x, t) = \frac{G(\tau)}{R_1 - t} \quad \tau = \frac{R_2 - \frac{1}{2}x}{\sqrt{R_1 - t}} \quad G_{\tau\tau} - 2\tau G_\tau - 4(G + G^2) = 0.$$

Las soluciones exactas de ecuaciones en derivadas parciales son muy difíciles de obtener y normalmente requieren asumir ciertas propiedades de simetría en la ecuación y aplicar teoría de grupos continuos o de Lie.

Entre las soluciones exactas que se pueden obtener para una ecuación parabólica no lineal destacan las soluciones auto-semejantes. La forma general de estas soluciones involucra u_0 y ξ_0 , sin embargo, en muchos problemas con no linealidades polinómicas, una expresión con potencias como la recuadrada arriba es bastante habitual.

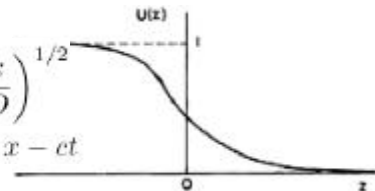
Otro tipo de solución muy importante son las ondas viajeras o solitarias, que también son llamadas solitones (en sentido estricto sólo son solitones las ondas solitarias de EDP integrables, sin embargo, normalmente se abusa del término si se hace sinónimo de éstas). Mediante una transformación sencilla es posible convertir toda solución auto-semejante en un solitón. Mostrando que ambos tipos de soluciones están muy relacionados.

Los solitones se obtienen fácilmente de resolver una ecuación diferencial ordinaria. Aquí vemos un ejemplo sencillo, una ecuación del calor no lineal con una no-linealidad cuadrática (como el flujo de Ricci). La solución auto-semejante ϕ depende de la variable τ y resuelve la EDO mostrada abajo-derecha.

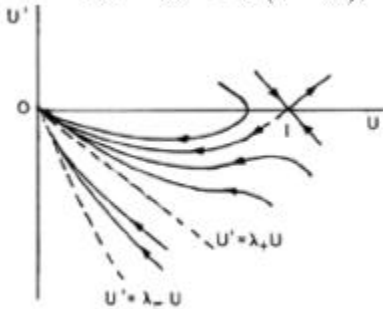
Ondas solitarias o "solitones"

- Ejemplo: Ecuación de Fisher

$$u_t = ku(1-u) + Du_{xx} \quad t^* = kt, \quad x^* = x \left(\frac{k}{D} \right)^{1/2}$$

$$u_t = u(1-u) + u_{xx} \quad u(x,t) = U(z), \quad z = x - ct$$


$$-cU' - U'' = U(1-U), \quad z' = \frac{d}{dz}, \quad \begin{matrix} U' & = & V \\ V' & = & -cV - U(1-U), \end{matrix}$$



Linearising the system the eigenvalues

$$P : (0, 0) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-c \pm (c^2 - 4)^{1/2} \right],$$

stable node if $c^2 \geq 4$ | stable spiral if $c^2 < 4$.

$$Q : (1, 0) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-c \pm (c^2 + 4)^{1/2} \right]$$

always a saddle point

Pongamos otro ejemplo, la llamada ecuación de Fisher (muy utilizada en biología de poblaciones) como modelo espacio-temporal asociado a la ecuación logística o modelo de Verhulst para poblaciones.

Observamos la adimensionalización de la ecuación y la EDO que resuelven sus solitones. Estas soluciones especiales se suelen analizar en el espacio de fases y corresponden a curvas cerradas (homoclínicas para solitones tipo "montaña" o heteroclínicas para solitones tipo "rizo" (kink), como el mostrado). El análisis en el plano de fases se realiza determinando los puntos críticos o de equilibrio (donde el término no lineal de la EDO es cero), linealizando la ecuación alrededor de ellos y determinando su tipo en función de los autovalores del jacobiano.

Vemos una onda tipo "rizo" (kink) para $c^2 > 4$ que conecta el punto silla en $(1,0)$ con el nodo estable en el origen $(0,0)$.

Blow-up de soluciones

- Ecuaciones diferenciales ordinarias

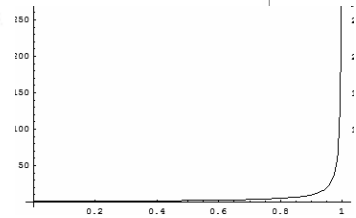
$$Y_t = Y^2, \quad t > 0; \quad Y(0) = a. \quad (7.21)$$

Si el dato inicial es $a > 0$, se sigue inmediatamente que existe una única solución definida en un intervalo temporal $0 < t < T$ con $T = 1/a$, y dada por la fórmula

$$Y(t) = \frac{1}{T-t}. \quad (7.22)$$

Vemos pues que la evolución está descrita por una función regular para $t < T$. Cuando $t \rightarrow T^-$ (límite por la izquierda), vemos que la solución explota, $Y(t) \rightarrow \infty$. No solo eso, también sabemos cual es la tasa de crecimiento cerca de la explosión, $Y(t) = O((T-t)^{-1})$. Este será para nosotros el *ejemplo elemental de explosión*.

- Solución con asíntota vertical



La explosión de soluciones o blow-up no es un fenómeno "extraño" en la solución de EDO. Por ejemplo una ecuación tan sencilla como la mostrada tiene una solución que explota en tiempo infinito, tiene una asíntota vertical o se vuelve infinita en un tiempo finito.

Esta propiedad es heredada por ecuaciones parabólicas que tienen este mismo tipo de no-linealidad.

Blow-up de soluciones

- Explosión de soluciones : típico EDP NL parabólicas

We consider the problem of the blow-up of solutions of the initial value problem

$$u_t = u_{xx} + u^p \quad (1)$$

where $p > 1$, $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, and $u(\cdot, 0) = u_0 \in C^0(\mathbb{R})$. It is well-known that, for a large class of initial data u_0 , the solution will diverge in a finite time at a single point (for reviews on this problem, see [9, 17]).

We are interested in the profile of the solution at the time of blow-up. To explain what this means, let us fix the blow-up point to be 0 and the blow-up time to be T . Then, we ask whether it is possible to find a function $f^*(x)$ and a rescaling $g(t, T)$ so that

$$\lim_{t \uparrow T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(g(t, T)x, t) = f^*(x). \quad (2)$$

$u(t)$ solves the ODE $\dot{u} = u^p$, i.e. $u(t) = ((p-1)(T-t))^{-\frac{1}{p-1}}$ for $T = (p-1)^{-1} u_0^{1-p}$.

$$u(x, t) = (T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \varphi\left(\frac{x}{(T-t)^{1/2k}}, -\log(T-t)\right).$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= L_{\tau}^{-2} \varphi'' - \frac{1}{2k} \xi \varphi' - \frac{1}{p-1} \varphi + \varphi^p \\ \varphi(\xi, \tau_0) &= T^{\frac{1}{p-1}} u_0(T^{\frac{1}{2k}} \xi) \end{aligned}$$

La ecuación parabólica más sencilla con explosión de soluciones es mostrada en (1), para $p > 1$. El comportamiento de la solución cerca del límite toma la forma que aparece en (2), que está caracterizada por un factor de escalado, que es solución de la EDO.

Vemos abajo izquierda que la solución es de tipo auto-semejante. Esto es típico y las soluciones que explotan, cerca de la singularidad se comportan como soluciones auto-semejantes (o solitones) por lo que se pueden determinar resolviendo una EDO adecuada. Eso es típico en ecuaciones parabólicas no lineales como el flujo de Ricci.

Solitones de Ricci

- Soluciones auto-semejantes del Flujo de Ricci

$\lambda > 0$, scaling time by λ and distances by $\lambda^{\frac{1}{2}}$,

$$\hat{g}(x, t) = \lambda g(x, t/\lambda),$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(x, t/\lambda) = -2\text{Ric}(g(t/\lambda))(x) = -2\text{Ric}(\hat{g}(t))(x)$$

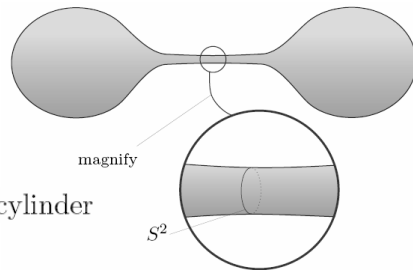
- Escalado: tensor de Ricci invariante
- Curvaturas se reescalan

$$R(\hat{g}(x, t)) = \lambda^{-1} R(g(x, t/\lambda)).$$

Límite puede ser no compacto
(topología original se pierde)

the blow-up looks like a part of the cylinder

$S^2 \times \mathbb{R}$ (a 'neck')



El flujo de Ricci cumple un escalado parabólico y tiene soluciones auto-semejantes. Dada una solución $g(x,t)$ podemos obtener una nueva solución reescalando el tiempo en λ y las distancias en su raíz cuadrada.

Ante este tipo de re-escalado parabólico el tensor de Ricci permanece invariante, sin embargo, la curvatura escalar se reescala como la inversa de λ , si λ se hace muy grande la curvatura se hace muy pequeña. En el límite un cuello como el de la figura que forma parte de una variedad compacta se convierte en un cilindro (un cuello o neck) que es una variedad no compacta. Ello puede hacer que la topología de la variedad original se pierda, por eso es necesario un buen estudio de los posibles límites de las singularidades del flujo y que el procedimiento de cirugía que comentamos en la primera charla se realice de forma adecuada para no perder "conciencia" de la topología original una vez que "podemos" las singularidades. Veremos más detalles de la cirugía en la próxima y última charla.

Solución Flujo de Ricci

Einstein metrics

$$R_{ij}(x, 0) = \lambda g_{ij}(x, 0), \quad \forall x \in M \quad R_{ij}(x, t) = R_{ij}(x, 0) = \lambda g_{ij}(x, 0)$$

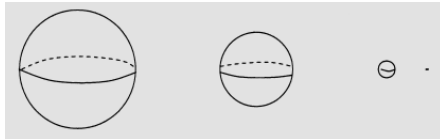
$$\boxed{\lambda > 0} \quad g_{ij}(x, t) = \rho^2(t) g_{ij}(x, 0)$$

$$\frac{\partial(\rho^2(t) g_{ij}(x, 0))}{\partial t} = -2\lambda g_{ij}(x, 0)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho}, \quad \rho^2(t) = 1 - 2\lambda t.$$

metric $g_{ij}(x, t)$ shrinks homothetically to a point as $t \rightarrow T = 1/2\lambda$
as $t \rightarrow T$, the scalar curvature becomes infinite like $1/(T - t)$.

- Solución "explota" en tiempo finito (blow-up)



En la charla anterior vimos que las soluciones más sencillas del flujo de Ricci son las métricas de Einstein, que para λ positivo, explotan en tiempo finito. Por ejemplo, para una métrica tipo esfera, el volumen se reduce a cero y al mismo tiempo la curvatura tiende a infinito, todo ello en un tiempo finito. Se dice que la variedad se "extingue".

Un factor λ como este aparecerá en los solitones de Ricci como ahora veremos.

Solución Flujo de Ricci

Einstein metrics

$$\boxed{R_{ij}(x, 0) = -\lambda g_{ij}(x, 0)} \quad \forall x \in M$$

$$\lambda < 0 \quad g_{ij}(x, t) = \rho^2(t)g_{ij}(x, 0)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \rho^2(t) = 1 + 2\lambda t.$$

metric $g_{ij}(x, t)$ exists and expands homothetically for all times,

and the curvature will fall back to zero like $-1/t$

evolving metric $g_{ij}(x, t)$ only goes back in time to $-1/2\lambda$,

the metric explodes out of a single point in a "big bang".

- Solución ha "explotado" en el "pasado"

Para una métrica de Einstein con parámetro lambda negativo, la solución existe para todo tiempo y se expande con una escalado proporcional (homotecia) con una curvatura que decae hacia cero armónicamente.

Esta solución no es "anciana" ya que no podemos evolucionarla hacia el pasado, ya que encontramos una explosión (tipo big bang).

Solitones de Ricci

- Solución auto-semejante módulo difeomorfismos

family of diffeomorphisms ψ_t | $\hat{g}(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g(t))$,
 $\psi_t^*(g(t)) = \psi_t^*(g(t) - g(s)) + \psi_t^*(g(s))$ and differentiate at $t = s$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \sigma'(t)\psi_t^*(g) + \sigma(t)\psi_t^*\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_X g).$$

$$g(t) = g_0 \quad \sigma(t) := 1 - 2\lambda t, \quad X(t) := \frac{1}{\sigma(t)}Y,$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \sigma'(t)\psi_t^*(g_0) + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_X g_0) = \psi_t^*(-2\lambda g_0 + \mathcal{L}_Y g_0)$$

$$= \psi_t^*(-2\text{Ric}(g_0)) = -2\text{Ric}(\psi_t^* g_0) = -2\text{Ric}(\hat{g}).$$

- Solitón de Ricci

$$-2\text{Ric}(g_0) = \mathcal{L}_Y g_0 - 2\lambda g_0$$

Definition 1.2.2. Such a flow is called a steady, expanding or shrinking 'Ricci soliton' depending on whether $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ or $\lambda > 0$ respectively.

$$-2R_{ij} = 2\lambda g_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i.$$

Llegados a este punto la pregunta es ¿qué es un solitón de Ricci? Es una solución auto-semejante generada por una familia uniparamétrica de difeomorfismos (parametrizados en el "tiempo") aplicados a la métrica sujeta al flujo de Ricci. $\sigma(t)$ es un reescalado que podremos elegir convenientemente.

Derivando la métrica transformada observamos que, si la métrica original es constante, el factor de escalado el que vimos en la transparencia anterior, obtenemos una nueva solución del flujo de Ricci sólo si la métrica original constante cumple la ecuación "elíptica" que presentamos recuadrada, en la que la Y representa la derivada de Lie del campo vectorial Y .

En función del parámetro λ , hablaremos de un solitón de Ricci estacionario, en expansión o en contracción.

Aclaremos en la fórmula final cómo sería la ecuación del solitón de Ricci con la derivada de Lie desarrollada en derivadas covariantes en coordenadas locales.

Solitones de Ricci

- Solitón gradiente de Ricci

$$-2\text{Ric}(g_0) = \mathcal{L}_Y g_0 - 2\lambda g_0$$

$$-2R_{ij} = 2\lambda g_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i.$$

$$V_i = \nabla_i f$$

$$R_{ij} + \lambda g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = 0.$$

- Solitón "cigarro" (cigar) de Hamilton

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1+x^2+y^2} \quad f(x,y) = (x^2+y^2)/2, \quad R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = 0$$

metric is rotationally symmetric, noncompact steady gradient Ricci soliton

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1+x^2+y^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1+r^2} = ds^2 + \tanh^2 s d\theta^2$$

- Tiende a cilindro de radio 1
(R tiende a cero al crecer r)

$$R = \frac{4}{1+r^2} = \frac{4}{\cosh^2 s} = \frac{16}{(e^s + e^{-s})^2}.$$

Witten Black Hole.

Entre los solitones más interesantes del flujo de Ricci están los solitones gradiente, en los que el campo vectorial Y es de tipo gradiente, el gradiente de una función escalar f .

En ese caso, la hessiana aparece en la ecuación del solitón de Ricci.

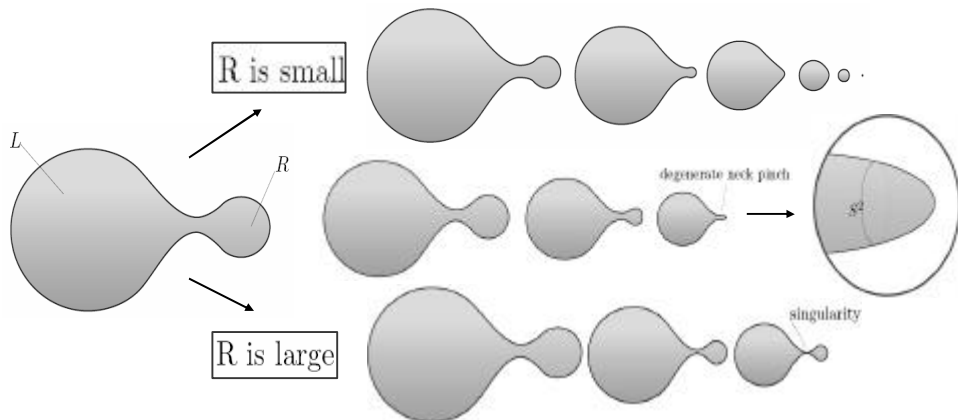
Entre todos los solitones gradiente, nos paramos un momento en el solitón cigarro (que dije en la primera charla que era la pesadilla de Hamilton). Su expresión en 2D es la que vemos (en 3D se extiende mediante simetría rotacional). Es un solitón gradiente de Ricci que estacionario y no compacto. Lo que Perelman descubrió que este solitón no se puede producir como modelo de singularidad porque es estacionario, pero Hamilton, que lo conjeturó no logró demostrarlo. Veremos más detalles en la próxima charla.

Como vemos el solitón cigarro tiende a un cilindro de radio 1 conforme la coordenada radial r crece (la curvatura escalar tiende a cero).

Este tipo de solución también se llama agujero negro de Witten. De hecho, las soluciones de tipo agujero negro en gravitación y teoría de cuerdas son solitones de las ecuaciones correspondientes.

Solitones de Ricci

Pinzamiento del cuello (neck-pinch)



Soliton de Bryant (esferas de radio decrece como parábola)

Otro tipo de solitón es el solitón de Bryant que aparece rodeado por un círculo a la izquierda, una sucesión de esferas de radio decreciente en forma parabólica.

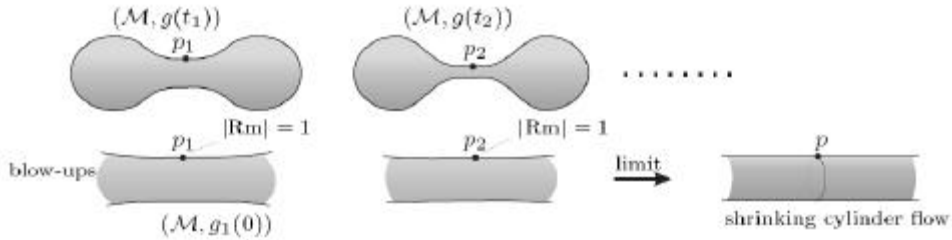
En general, cuando tenemos una variedad con dos componentes, una grande L y otra más pequeña R , unidas por un cuello, la evolución del flujo de Ricci depende de sus volúmenes relativos. Si el volumen de R es pequeño comparado con el de L , entonces R reduce su volumen más rápido que el cuello y acaba suavizándose y desapareciendo en L , y en la figura, L acaba resultando en una "esfera" que colapsa en un punto (en tiempo finito).

Cuando el volumen de R es grande comparado con L , el cuello tiende a colapsar en una singularidad que unirá la parte "grande" L y la parte pequeña " R ".

En el caso intermedio, para una relación entre volúmenes adecuada (que depende de las curvaturas de L y R) el cuello y la parte pequeña R colapsan al mismo ritmo y no se produce singularidad si no que se produce como límite un solitón de tipo Bryant (que más tarde llamaremos ϵ -cap o ϵ -capuchón).

Desarrollo de singularidades

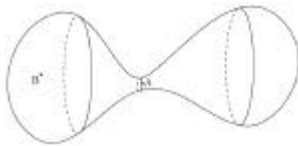
- Escalado dependiente del tiempo



- Convergencia de variedades riemannianas puntuadas

Definition 8.1. A sequence (M_i, g_i, p_i) of smooth, complete, pointed Riemannian manifolds is said to converge smoothly to the smooth, complete, pointed manifold (M, g, p) as $i \rightarrow \infty$ if the

- Requiere acotar el radio de inyectividad



The injectivity radius $\text{inj}(p)$ at a point $p \in M$ is defined by

$$\text{inj}(p) := \sup\{r > 0 : \exp_p : B(0, r) \rightarrow M \text{ is injective}\}.$$

El análisis de la evolución de la métrica y la posible generación de singularidades la realizaremos utilizando la propiedad de escalado parabólico del flujo de Ricci. Tomando una variedad riemanniana puntuada (en la que hemos seleccionado un punto concreto), aplicando el reescalado conforme la variedad tiende al límite de tal forma que la norma del tensor de curvatura tenga un valor dado (sea igual a 1), lo que siempre se puede conseguir, obtenemos que el proceso de colapso del cuello (en la figura) conduce a un cilindro en contracción, cuya métrica es muy simple y corresponde a un solitón del flujo.

Para poder realizar este proceso es necesario definir rigurosamente qué es el límite de una sucesión "convergente" (es decir, y cuando converge) de variedades riemannianas puntuadas. Esta definición es de Hamilton. Sin embargo, demostrar que este límite existe, o estudiar cuando este límite existe, requiere una acotación del radio de inyectividad de la variedad en un punto dado. El radio de inyectividad es un concepto muy importante en el análisis de la convergencia de variedades riemannianas. Se define en el punto p como la longitud de la geodésica cerrada que pasa por p que tiene una longitud mínima.

Intuitivamente, imaginemos que en el punto p se produce un flash de luz. Los rayos de luz se propagan en todas direcciones desde p . El radio de inyectividad es la distancia mínima que uno de esos rayos ha de recorrer para "colisionar" con otro de esos rayos.

Desarrollo de singularidades

Proposition 14.6 Let $(M^3, g(t))$ be a complete ancient solution of the Ricci flow. Assume that there exists a continuous function $\phi(t)$ such that $|K_{sec}(g_t)| \leq \phi(t)$. Then g_t has nonnegative sectional curvature for as long as it exists.

$$R_{\min}(t) \geq \frac{n}{n(R_{\min}(t_0))^{-1} - 2(t - t_0)} \geq -\frac{n}{2(t - t_0)} \text{ for all } t > t_0.$$

$$R_{\min}(t) \geq -\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{n}{2(t - t_0)} = 0.$$

Proposition 14.7 In dimension $n = 3$ every Type I limit of Type I singularity has nonnegative sectional curvature for as long as it exists.

Theorem 14.13 (Perelman's No Local Collapsing Theorem). Let $(M^n, g(t))$ be a solution to the Ricci flow that becomes singular in a finite time T . Then there exists a constant $C > 0$ independent of t and a subsequence (x_i, t_i) such that

$$inj(x_i, t_i) \geq \frac{C}{\sqrt{\max_M |Rm(\cdot, t)|}}$$

Las soluciones ancianas (que veremos en un momento) del flujo de Ricci, si tienen curvaturas seccionales (3 en cada punto en 3D) acotadas entonces tienen curvatura seccional no-negativa. Esto significa que podemos acotar la curvatura mínima de la singularidad conforme ésta se va produciendo.

n es 3, la dimensión.

Un teorema fundamental de Perelman, el llamado de "ausencia de colapso local" nos dice que si el flujo de Ricci se vuelve singular en tiempo finito, el radio de inyectividad está acotado en función de la curvatura máxima de la variedad en M . Esta acotación, que no tenía Hamilton, permite determinar los límites de sucesiones de variedades riemannianas puntuadas. Veamos cómo.

Desarrollo de singularidades

Theorem 8.3. *Suppose that $(M, g(t))$ is a solution of the Ricci flow defined on a maximal time interval $[0, T)$, where $T < \infty$. Then there exist points $p_i \in M$ and times $t_i \in [0, T)$, $t_i \rightarrow T$ such that*

$$M_i := |\text{Rm}|(p_i, t_i) = \sup_{x \in M, t \in [0, t_i]} |\text{Rm}|(x, t) \rightarrow \infty.$$

If we now define

$$g_i(t) = M_i g\left(t_i + \frac{t}{M_i}\right) \quad \left(\text{for } t \leq 0 \quad |\text{Rm}(g_i(t))| = \frac{|\text{Rm}\left(g\left(t_i + \frac{t}{M_i}\right)\right)|}{M_i} \leq \frac{M_i}{M_i} = 1\right)$$

then there exists $b > 0$ such that $(M, g_i(t), p_i)$ converges to a Ricci flow $(N, g_\infty(t), p_\infty)$ defined for $t \in (-\infty, b)$. Furthermore $|\text{Rm}(g_\infty(0))|(p_\infty) = 1$ and $|\text{Rm}(g_\infty(t))| \leq 1$ for $t \leq 0$.

the limit flow is defined for $t \in (-\infty, b)$ – such solutions are called **ancient**.

Theorem 6.8 *Let M be a compact Riemannian 3-manifold which admits a solution of the Ricci flow which develops a singularity at time T . Then there is a sequence of dilations²⁰ of the solution which converges to a quotient by isometries of one of the following manifolds:*

- i) S^3 , (a topological space form)
- ii) $S^2 \times \mathbb{R}$, (a neck)
- iii) $\Sigma \times \mathbb{R}$, where Σ is a cigar solution, **Hamilton 1995**

El resultado matemático es el siguiente. Como vemos, durante el proceso de re-escalado, que toma la forma indicada en el recuadro, se puede conseguir que la norma de la curvatura riemanniana sea siempre menor o igual que la unidad. Con condiciones de regularidad adecuadas, la secuencia de variedades riemannianas puntuadas converge a un flujo concreto que cumple con la condición de que en el punto considerado en el tiempo, sea $t=0$, es exactamente 1 y en su futuro entre 0 y T es siempre menor que 1.

Este tipo de soluciones límite siempre se pueden extender hacia el pasado a menos infinito y por ello se llaman soluciones ancianas.

Hamilton demostró en 1995 (módulo una conjetura sobre el radio de inyectividad que probó Perelman) que si el flujo de Ricci produce una singularidad en tiempo finito T , existe una secuencia de reescalados (dilataciones) de la solución que converge a un 3 modelos de singularidad muy sencillos (módulo cocientes por ciertas isometrías) : la esfera, un cuello (cilindro) o un solitón cigarro.

Desarrollo de singularidades

Hamilton (1995)

Singularities		
Finite Time $T < \infty$	Type I	$\sup_{M \times [0, T)} Rm(\cdot, t) (T - t) < \infty$
	Type II _a	$\sup_{M \times [0, T)} Rm(\cdot, t) (T - t) = \infty$
Infinite Time $T = \infty$	Type II _b	$\sup_{M \times [0, \infty)} Rm(\cdot, t) t = \infty$
	Type III	$\sup_{M \times [0, \infty)} Rm(\cdot, t) t < \infty$

Singularity model	time interval	curvature bound
Ancient Type I	$(-\infty, \omega)/\omega > 0$	$\sup_{M_\infty \times (-\infty, 0]} Rm_\infty(\cdot, t) t < \infty$
Ancient Type II	$(-\infty, \omega)/\omega > 0$	$\sup_{M_\infty \times (-\infty, 0]} Rm_\infty(\cdot, t) t = \infty$
Eternal Type II	$(-\infty, \infty)$	$\sup_{M_\infty \times (-\infty, 0]} Rm_\infty(\cdot, t) < \infty$
Immortal Type III	$(-\alpha, \infty)/\alpha > 0$	$\sup_{M_\infty \times (-\infty, 0]} Rm_\infty(\cdot, t) \cdot t < \infty$

La clasificación de singularidades que obtuvo Hamilton aparece en la tabla de arriba. Los tipos I y IIa explotan en tiempo finito; los tipos IIb y III son soluciones eternas. Las singularidades de tipo I tienen curvatura finita hasta el momento de la explosión (no son singularidades "verdaderas", en realidad estamos hablando de posibles límites de variedades (como la R en la figura anterior) que pueden o no ser singulares). Entre todas las "singularidades" las realmente singulares son las de tipo IIa.

Hamilton también introdujo modelos de la singularidad. Las soluciones ancianas son las que explotando en tiempo finito han existido en el pasado hasta menos infinito. Las de tipo II alcanzan curvatura infinito las tipo I no.

Las soluciones eternas (típicas del flujo de Ricci en 2D por ejemplo) nunca explotan y viven siempre y han vivido siempre.

Los modelos "buenos" de las singularidades son las soluciones ancianas, que puedo prolongar en el pasado hasta donde yo quiera.

Las soluciones inmortales son soluciones que viven siempre pero que no pueden ser llevadas hacia el pasado, fueron generadas por un "big bang".

Soluciones ancianas

definition 1.1. $(M, g(t))$ is a κ -solution if

Perelman

- $g(t)$ is an ancient solution of the Ricci flow

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}, \quad -\infty < t \leq 0.$$

- for each t , $g(t)$ is a complete, non flat metric of bounded curvature and non negative curvature operator.
- for each t , $g(t)$ is κ -noncollapsed on all scales, i.e. if $|Rm(g(t))| \leq \frac{1}{r^2}$ on $B = B(p, t, r)$, then

$$\frac{\text{vol}_{g(t)}(B)}{r^n} \geq \kappa$$

Examples: S^3 and $S^2 \times \mathbb{R}$ with their standard flow are κ -solutions for some $\kappa > 0$. But $S^2 \times S^1$ with the standard flow is not a κ -solution. It is κ -collapsed at very negative times.

- All curvatures of $g(t)$ at x are controlled by the scalar curvature $R(x, t)$.
- For each point x in M , $R(x, t)$ is nondecreasing.

normalized κ -solution at (x_0, t_0) by a shift in time and a parabolic rescaling such that $R_{g(t_0)}(x_0, 0) = 1$.

Las soluciones ancianas que surgen en las singularidades son soluciones llamadas kappa-no colapsadas. Estas soluciones cumplen el teorema 3.3.3, que acota nos dice que si su curvatura escalar (tambi3n la norma de la curvatura riemanniana) est3 acotada por $1/r^2$ en cierta bola centrada en x_0 de radio r , entonces el volumen de esta regi3n es mayor que cierta cota (kappa por r^3 , en 3D). Esto garantiza que el volumen cerca de la singularidad tiene un tama3o "finito" conforme nos acercamos a ella.

Las soluciones que nos interesan son las soluciones ancianas que son kappa-no colapsadas.

Perelman demostr3 que estas soluciones convergen en la singularidad a solitones gradiente que se contraen (generan la singularidad).

Soluciones ancianas

Asymptotic solitons Perelman defines an asymptotic soliton $(M_{-\infty}, g_{-\infty}, x_{-\infty})$ of an n -dimensional κ -solution $(M, g(t))$ as follows. Pick a sequence $t_k \rightarrow -\infty$.

theorem 1.3 ([P03]I.11.2). *there exists $x_k \in M$ such that $(M, \frac{1}{\alpha_k} g(t_k - t_k t), x_k)$ (sub) converge to a non flat gradient shrinking soliton $(M_{-\infty}, g_{-\infty}, x_{-\infty})$, called an asymptotic soliton of the κ -solution.*

corollary 1.4 (of the compactness theorem). *Any 3-dimensional asymptotic soliton is a κ -solution.*

classification of κ -solutions We have the following

theorem 1.9. *Any κ -solution $(M, g(t))$ is diffeomorphic to one of the following.*

- a $S^2 \times \mathbb{R}$ or $S^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R} = \mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$, and $g(t)$ is the round cylindrical flow.
- b \mathbb{R}^3 and $g(t)$ has strictly positive curvature.
- c A finite isometric quotient of the round S^3 and $g(t)$ has positive curvature. Moreover, $g(t)$ is round if and only if the asymptotic soliton is compact. If the asymptotic soliton is non compact, M is diffeomorphic to S^3 or \mathbb{RP}^3 .

El resultado anterior permitió a Perelman el clasificar las singularidades con el siguiente teorema que nos dice cómo es la variedad en el entorno de una singularidad y cómo fue (porque son soluciones ancianas) en todo tiempo pasado.

Si tenemos una curvatura acotada por el teorema anterior para una región entre dos bolas de radios r y $2r$, esta región debe ser de una de las tres posibilidades siguientes:

Un epsilon cuello que evoluciona, un epsilon capuchon o un variedad compacta con curvatura seccional positiva.

Además para todas kappa solución anciana podemos acotar su volumen de forma coercitiva, por arriba y por debajo en función de la curvatura y de una cota dada.

Soluciones ancianas

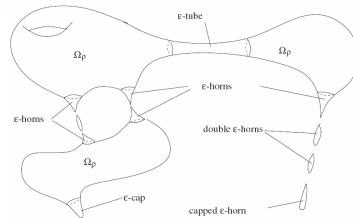
Perelman

Recall that an ε -neck (of radius r) is an open set with a Riemannian metric, which is, after scaling the metric with factor r^{-2} , ε -close to the standard neck $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$ with the product metric, where \mathbb{S}^2 has constant scalar curvature one and \mathbb{I} has length $2\varepsilon^{-1}$ and the ε -closeness refers to the $C^{[\varepsilon^{-1}]}$ topology.

A metric on $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{I}$, such that each point is contained in some ε -neck, is called an ε -tube, or an ε -horn, or a **double ε -horn**, if the scalar curvature stays bounded on both ends, or stays bounded on one end and tends to infinity on the other, or tends to infinity on both ends, respectively.

A metric on \mathbb{B}^3 or $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{B}^3$ is called a ε -cap if the region outside some suitable compact subset is an ε -neck. A metric on \mathbb{B}^3 or $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{B}^3$ is called a **capped ε -horn** if each point outside some compact subset is contained in an ε -neck and the scalar curvature tends to infinity on the end.

- (a) an ε -tube with boundary components in Ω_ρ , or
- (b) an ε -cap with boundary in Ω_ρ , or
- (c) an ε -horn with boundary in Ω_ρ , or
- (d) a capped ε -horn, or
- (e) a double ε -horn.

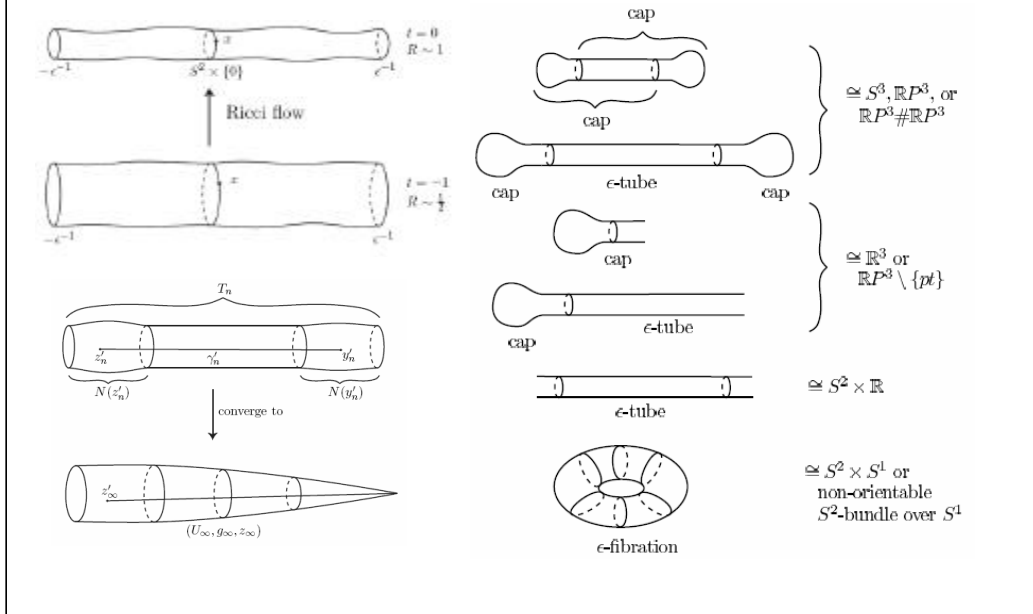


It is clear that there is a definite lower bound (depending on ρ) for the volume of subsets of types (a), (b) and (c), so there can be only a finite number of them. Thus we conclude that there is only a finite number of components of Ω containing points of Ω_ρ , and every such component has a finite number of ends, each being an ε -horn.

Perelman demostró que todas las singularidades en la variedad son épsilon tubos ancianos que conectan grandes volúmenes de la variedad. Estos e-tubos evolucionan dando lugar a que en el momento de la explosión sigan siendo union de e-tubos, o se conviertan en un conjunto e-cuernos, dobles e-cuernos, o e-capuchones. Como se ve en la figura. Todos los modelos de singularidad como soluciones ancianas "proviene" de lo mismo, uniones de e-tubos.

Como los volúmenes de estas soluciones están acotados inferiormente, sólo puede haber un número finito de ellas en una variedad de volumen finito. De esta forma la variedad M la podemos descomponer en un conjunto de regiones con volumen grande (la parte gruesa o thick) unidas por un conjunto de e-tubos evolucionados hasta la singularidad que tienen volúmenes no nulos pero tampoco grandes (la parte fina o thin).

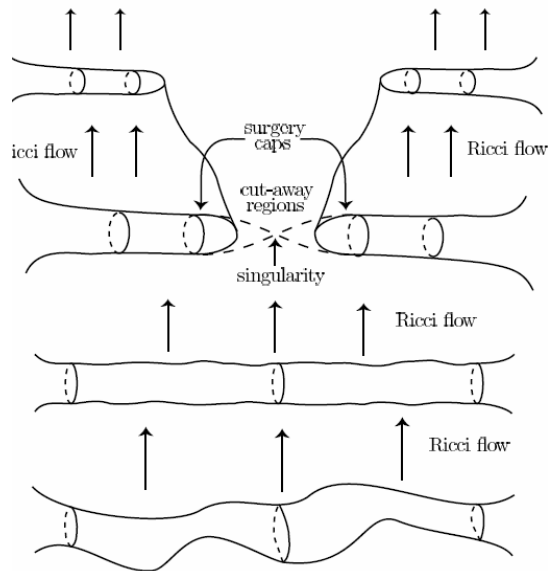
Soluciones ancianas



Aquí vemos a la derecha un muestrario de soluciones ancianas posibles.

A la izquierda vemos cómo puede evolucionar un epsilon-tubo, en función de sus cotas de curvatura. Arriba no se produce la singularidad, abajo sí se produce.

Flujo de Ricci con cirugía (idea)



La clasificación de singularidades nos permite realizar una cirugía fina del flujo de Ricci eliminando las regiones donde se producen singularidades. Esto lo veremos en la cuarta y última charla. Así como otras aportaciones de Perelman.