Examen de Métodos Matemáticos y T.C.
Extraordinario de Febrero **Duración: 3 horas 30 minutos**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Define el rotacional de una función escalar y de una función vectorial en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué relación tiene con el rotacional en $\mathbb{R}^3$.

2. Resuelve la siguiente ecuación utilizando transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

3. ¿Cuándo las condición de estabilidad de von Neumann para ecuaciones en diferencias finitas es necesaria y suficiente? ¿Cuándo es sólo suficiente? ¿Cuándo es sólo necesaria?

4. Formulación variacional (continua) del siguiente problema:
Hallar $u \in \mathrm{C}^2(0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du}{dx}\right) = f(x),\\ &\frac{du}{dx}(0) = 3, \quad u(1) = 2. \end{aligned}$$

5. Enumera todas las diferencias que hay en la aplicación del método del *simplex* (símplice) a un problema de minimización respecto a su aplicación a un problema de maximización.

6. ¿Qué significan las siglas PERT? Para qué sirve el método PERT. ¿Cuáles son sus ventajas respecto al método CPM? (si es que tiene alguna, por supuesto).

7. ¿Qué es la matriz de Gill-Murray? ¿Para qué sirve? ¿Cuáles son sus ventajas respecto al uso de la matriz hessiana? (si es que tiene alguna, por supuesto).

8. Describe brevemente el método de aceptación y rechazo para generar valores de una variable aleatoria DISCRETA.

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos; salvo cuando se le pida una demostración.
NO se permite el uso de libros, apuntes, tablas de transformadas, etc.
NO se permite el uso de calculadora, sea ésta científica, programable o de cualquier otro tipo, ni de ordenador portátil o equivalente.

PROBLEMAS

1. Escribe el esquema que resulta al aplicar el método de Richardson para resolver la ecuación parabólica (0.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 4, \quad t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1).$$

NOTA: el método de Richardson consiste en utilizar una técnica leap-frog en tiempo ($D_t = (E_t - E_t^{-1})/\Delta t$) y un operador en diferencias finitas centrado en espacio ($D_x^2 = (E_x - 2 + E_x^{-1})/\Delta x^2$).

   a) Determina el error de truncado para dicho método. (0.75)

   b) Estudia la estabilidad del esquema resultante para $\alpha(x)$ =cte., utilizando el método de Von Neumann. ¿La condición de estabilidad que obtienes es necesaria, suficiente o ambas cosas? (0.75)

   c) ¿Cómo tratarías las condiciones de contorno con el mismo orden de consistencia? (0.25)

   d) Escribe la formulación variacional continua del problema en ecuaciones en derivadas parciales considerado. (0.75)

2. Determina los puntos óptimos (locales y globales) de la función $\sin(x_1^2 + 3x_2^2)$ sujeta a las siguientes restricciones:

   a) sin restricción, (0.25)

   b) $|x_2| < 1, \qquad 0 \leq x_1 \leq 1$, (0.5)

   c) $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$. (0.5)

3. Represente mediante un grafo la cadena de Markov cuya matriz de probabilidades de transición es $\begin{pmatrix} q/2 & p/2 & q/2 & p/2 \\ q/2 & 0 & p & q/2 \\ 0 & p/2 & p/2 & q \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p + q = 1$, clasifíquela y encuentre su distribución de estado estable. (0.75)

4. Una variable aleatoria tiene como función de densidad a $f(x) = A\,sin(x)$, con $x \in [0,1]$. ¿Cuánto vale A? (0.15). Diseñe un experimento de Montecarlo para simular dicha variable (0.60) Utilizando dicho experimento, obtén tres valores de la variable simulada si dispones de un generador de números aleatorios (no lineal) que sigue

$$x_{n+1} = (5 + 3\,x_n^2) \bmod 7,$$

con semilla $x_0 = 2$. (0.25)