Primer Parcial del Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales

Convocatoria Ordinaria de Junio **Duración: 3 horas 30 minutos**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. ¿Todos los espacios normados son espacios de Hilbert? ¿Todos los espacios de Hilbert son normados? Justifica tu respuesta.
2. ¿Bajo que condiciones está definida la transformada de Laplace de $f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D} \to \mathbb{R}$? ¿Cómo está definida?
3. Enuncia el teorema de la divergencia.
4. Explica brevemente el método de la matriz para estudiar la estabilidad de un método en diferencias finitas.
5. Explica brevemente qué técnicas numéricas emplearías para resolver un problema parabólico en dimensión espacial 2.
6. ¿Qué es una base nodal?
7. Formulación variacional del siguiente problema:
   Hallar $u \in \mathrm{C}^2(0,1)$ tal que
$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x),$$
$$\frac{du}{dx}(0) = u(1) = 0.$$
8. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos.

PROBLEMAS

1. Escribe el esquema que resulta al aplicar el método de Crank-Nicholson (0.5) para resolver el siguiente problema parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

con condiciones de contorno tipo Neumann homogéneas.

   a) Determina el error de truncado del método. (1)

   b) Estudia la estabilidad del esquema con el método de von Neumann. (1)

   c) ¿Cómo tratas las condiciones de contorno al mismo orden de consistencia? (0.5)

2. Considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \qquad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = u(x, 1) &= 0, \\ u_x(0, y) = u_x(1, y) &= 1. \end{aligned}$$

   a) Plantea la formulación variacional continua del problema anterior (1 punto)

   b) Propón un método en elementos finitos continuos lineales a trozos equiespaciado para su resolución, especificando la triangularización del dominio, las bases del espacio funcional y la expresión matricial del sistema que se obtiene utilizando una malla equiespaciada con N+1 puntos en cada dirección X e Y. (2 puntos)