Primer Parcial de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales

Duración total del examen: 3 horas 30 minutos

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales. (Criterio de clasificación, tipos y formas canónicas).
2. ¿Qué es un método de elementos finitos?
3. Transformada de Fourier de la derivada n-ésima de una función y de la convolución de dos funciones.
4. Primera y segunda fórmulas de Green.
5. ¿Qué es un método de líneas? ¿Para resolver qué tipo de problemas lo utilizarías?
6. ¿Qué características de un método de diferencias finitas se deben estudiar para determinar su validez para resolver un problema parabólico en ecuaciones en derivadas parciales? ¿Qué relación existe entre ellas para un problema bien planteado? ¿Qué teorema establece dicha relación?
7. Diferencias entre condiciones de contorno esenciales y condiciones de contorno naturales en cuanto a su tratamiento con un método de elementos finitos.
8. ¿Qué problema resuelve la fórmula de D'Alembert? Además, escribe dicha fórmula.

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos.

Primer Parcial de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales

PROBLEMAS (2 horas 50 minutos)

1. Considera el siguiente problema

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t), \qquad x \in (0,\pi), t > 0\\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0\\
&u(x,0) = \sin(x), \qquad x \in (0,\pi).
\end{aligned}$$

   a) Determina su solución analítica. (1 punto)

   b) Propón un método en diferencias finitas de segundo orden en tiempo y espacio para su resolución. (0.5 puntos)

   c) Determina el error de truncación (o truncado) de dicho método. (0.5)

   d) Estudia su estabilidad. (1 punto)

2. Considera el siguiente problema

$$\begin{aligned}
&u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1),\\
&u(x,0) = u(x,1) = 0,\\
&u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0.
\end{aligned}$$

   a) Plantea la formulación variacional continua del problema anterior. (1 punto)

   b) Propón un método en elementos finitos continuos lineales a trozos, equiespaciados, para su resolución, especificando la triangularización del dominio, las bases del espacio funcional y la expresión matricial del sistema que se obtiene utilizando una malla equiespaciada con N+1 puntos en cada dirección X e Y. (2 puntos)