Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales
Convocatoria Ordinaria de Septiembre **Duración: 3 horas 30 minutos**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Demuestra para $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} u = \nabla \cdot \nabla \times\ u = 0, \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times\ \nabla u = 0.$$

2. Resuelve la siguiente ecuación utilizando transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). && \end{aligned}$$

3. Explica brevemente el método de la matriz para estudiar la estabilidad de un método en diferencias finitas.

4. Formulación variacional (continua) del siguiente problema:
Hallar $u \in C^2(0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \\ \frac{du}{dx}(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

5. Condición de optimalidad en el método del *simplex* (símplice).

6. ¿En qué consiste un problema de asignación? Escribe su expresión matemática.

7. Condiciones de Kuhn-Tucker para un problema de minimización con variables no restringidas en signo. ¿En qué casos son estas condiciones necesarias para que un punto sea mínimo? ¿Cuándo son suficientes?

8. Enumera las fases de un proceso de simulación.

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos; salvo cuando se le pida una demostración.

PROBLEMAS

1. Escribe el esquema que resulta al aplicar el método de Dufort-Frankel para resolver la ecuación parabólica (0.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 4, \quad t \in (0,T]$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1)$$

   a) Determina el error de truncado para dicho método. (0.75)

   b) Estudia la estabilidad del esquema resultante para $\alpha(x)$ =cte., utilizando el método de Von Neumann. ¿La condición de estabilidad que obtienes es necesaria, suficiente o ambas cosas? (0.75)

   c) ¿Cómo tratarías las condiciones de contorno con el mismo orden de consistencia? (0.25)

   d) Escribe la formulación variacional continua del problema en ecuaciones en derivadas parciales considerado. (0.75)

2. Determina los puntos óptimos de la función $x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3$ sujeta a las siguientes restricciones:

   a) sin restricción, (0.25)

   b) $x_1^2 + x_2^2 \geq 4$, (0.5)

   c) $x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \qquad 0 \leq x_3 \leq 5$. (0.5)

3. Represente mediante un grafo la cadena de Markov cuya matriz de probabilidades de transición es $\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p+q=1$, clasifíquela y encuentre su distribución de estado estable. (0.75)

4. Diseñe un experimento de Montecarlo para simular una variable aleatoria cuya función de densidad es $f(x) = 12\,x^2\,(1-x)$, con $x \in [0,1]$. (0.75) Utilizando dicho experimento, obtén tres valores de la variable simulada si dispones de un generador de números aleatorios que sigue

$$x_{n+1} = (5 + 3\,x_n) \bmod 7,$$

   con semilla $x_0 = 2$. (0.25)