Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales (Primer parcial)

2 de julio de 2002 **Duración: 3 horas 30 minutos**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales. Formas canónicas.

2. ¿Bajo que condiciones está definida la transformada de Fourier de $f : D \to R$? ¿Cómo está definida?

3. Demuestra para $u : R^3 \to R^3$

$$div \quad rot \quad u = 0$$

4. Primera y segunda fórmulas de Green

5. Explica brevemente el método de Von Neumann para estudiar la estabilidad de un método en diferencias finitas.

6. Formulación variacional del siguiente problema: hallar $u \in C^2(0,1)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$
$$\frac{du}{dx}(0) - u(0) = u(1) = 0$$

7. Diferencias entre condiciones de contorno esenciales y condiciones de contorno naturales en cuanto a su tratamiento con un método de elementos finitos.

8. Fórmula de D'Alambert

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos.

PROBLEMAS

1. Escribe el esquema que resulta al aplicar el método de Crank-Nicholson (0.5) para resolver el siguiente problema parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

   con condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas, donde α es una constante mayor que 0.

   (a) Determina el error de truncado del método (1.25)

   (b) Estudia la estabilidad del esquema con el método de Von Neumann (1.25)

2. Considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, &\quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u_y(x,0) = u(x,1) = 0, & \\ u(0,y) = u_x(1,y) = 1. & \end{aligned}$$

   (a) Plantea la formulación variacional continua del problema anterior (1 punto)

   (b) Propón un método en elementos finitos continuos lineales a trozos equiespaciado para su resolución, especificando la triangularización del dominio, las bases del espacio funcional y la expresión matricial del sistema que se obtiene utilizando una malla equiespaciada con N+1 puntos en cada dirección X e Y. (2 puntos)