Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales (completo)
2 de julio de 2002 **Duración: 3 horas**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Resuelve la siguiente ecuación utilizando transformadas de Fourier
$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

2. Escribe el método en diferencias finitas de tipo leap-frog (segundo orden en tiempo y en espacio, con fórmulas centradas para las derivadas) para la ecuación del calor en dos dimensiones. ¿Necesita arranque para tratar las condiciones iniciales?

3. Considere la ecuación
$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta u, \qquad \mathbf{v} \equiv (u,v,w)^\top.$$
que corresponde a la componente x de la ecuación del momento de las ecuaciones de Navier-Stokes, en coordenadas cartesianas, para flujo laminar e incompresible. **Adimensionalice** dicha ecuación para una longitud de referencia L, una escala de tiempo T, una escala en velocidad V y una presión de referencia (sea ρV^2). Se denomina número de Reynolds a $Re = \rho V L/\mu$. **Clasifique** en función del número de Reynolds (pequeños, intermedios y grandes) dicha ecuación en derivadas parciales. NOTA: las funciones incógnita v, w y p requieren ecuaciones adicionales. Para este ejercicio, considere que son funciones dada (datos del problema).

4. Describa un método en diferencias general (de un paso) para una ecuación parabólica general. Describa la condición de la matriz para estudiar su estabilidad. ¿Qué ventajas tiene dicha condición respecto a la de von Neumann?

5. Enuncia el teorema de Weierstrass

6. Condiciones de Kuhn-Tucker para un problema de minimización con variables positivas.¿En qué casos son estas condiciones necesarias para que un punto sea máximo? ¿Cuándo son suficientes?

7. Método de aceptación-rechazo para generar números aleatorios.

8. Construcción de un intervalo de confianza para un porcentaje.

OBSERVACIONES:

Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.

NO se permite el uso de libros, apuntes, tablas de transformadas, recetarios, “chuletas”, etc.

NO se permite el uso de calculadora, sea ésta científica, programable o de cualquier otro tipo, ni de ordenador portátil o equivalente.

PROBLEMAS

Problema 1. Resuelva el problema: Maximizar $2x_1 - x_2$, sujeto a

$$\begin{aligned}&5x_1 + 2x_2 \leq 9,\\ &x_1 + x_2 \leq 3,\\ &x_1 \text{ entera}, x_1, x_2 \geq 0. \qquad\qquad \text{(1 punto)}\end{aligned}$$

Problema 2. Un sistema de colas con un único servidor registra un número de llegadas que sigue una distribución de Poisson con una tasa promedio de aproximadamente diez por hora. El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con un promedio de cinco minutos.

1. ¿Cuál es el tiempo promedio entre llegadas? (0.5 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente seis llegadas en una hora? (0.5)
3. Calcule el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema (0.5) y el número esperado de clientes en cola. (0.5)

Problema 3. Considere la ecuación parabólica autoadjunta,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = g(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = h(t), \quad t \in (0,T]$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1).$$

1. Considera una malla $\mathcal{T}$ uniforme del intervalo $[0, L]$ de paso h (0.2). Define formalmente el espacio de elementos finitos a trozos cúbicos (de Hermite) continuos y con derivada continua ($V_{\mathcal{T},H}^{(3)}$) (0.3). ¿Cómo se desarrolla una función en este espacio? (0.1) Dibuja gráficamente cada una de las funciones base del mismo (0.4). Detalla matemáticamente una base del mismo (0.5). Preste especial atención a los extremos de la malla. (TOTAL: 1.5 puntos)
2. Escriba la formulación variacional discreta con espacios de nuestro problema utilizando dicho espacio de elementos finitos como espacio base (0.75).
3. Escribe la formulación variacional discreta con bases para nuestro problema y escribe la forma general de las matrices que obtienes para el sistema lineal correspondiente (0.75).