Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales
(14/Septiembre/2002) **Duración: 3 horas**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales. Formas canónicas.

2. Describe un método A.D.I. (implícito de dirección alternada o alternante) para la ecuación del calor en dos dimensiones en un dominio rectangular.

3. Describe formalmente el espacio de elementos finitos formado por polinomios a trozos cúbicos, continuos y con derivada continua. ¿Cómo se desarrolla una función en una base de dicho espacio? Describe gráficamente una base del mismo (no es necesario presentar la expresión analítica de las mismas).

4. Formulación variacional del siguiente problema: hallar $u \in C^2(0,1)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x),$$
$$\frac{du}{dx}(0) - u(0) = u(1) = 0.$$

5. Expresa el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } 5x_1 - 3x_2 + x_3, \text{ sujeto a} \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 3, \\ &\quad x_1 - x_3 \geq 5, \\ &\quad x_2 + x_3 = 3, \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

6. Función lagrangiana para el problema optimizar: $f(x_1, ..., x_n)$ sujeto a $g_i(x_1, ..., x_n) = b_i$, $i = 1, ..., m$. ¿Cómo utilizas esta función para obtener la solución del problema considerado?

7. Fórmulas de Little para colas

8. Método de la congruencia multiplicativa para generar números pseudoaleatorios.

PROBLEMAS

1. Escribe el esquema que resulta al aplicar el método de Crank-Nicholson (0.5) para resolver el siguiente problema parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g(x)\, u$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

con condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas, donde α es una constante mayor que 0 y $g(x)$ es una función suficientemente diferenciable.

   (a) Determina el error de truncado del método (1.25)

   (b) Estudia la estabilidad del esquema con el método de Von Neumann suponiendo que $g(x) = g$ es una constante positiva (1.25)

2. Se considera la cadena de Markov cuyos estados 1,2,3,4 tienen la matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Representa dicha cadena mediante un grafo, clasifica los estados, y si existe un estado estable determina las probabilidades de dicho estado. (0.75)

3. Muestre como usar números aleatorios uniforme entre 0 y 1 para obtener un valor correspondiente a variables aleatorias que sigan las siguientes distribuciones de probabilidad

   (a) Una variable aleatoria discreta X cuyo valor puede ser 4, 8 o 12 con probabilidades respectivas 1/3, 1/6 y 1/2.(0.5)

   (b) Una variable aleatoria X que sigue una distribución exponencial con parámetro λ=5.(0.5)

   (c) Una variable aleatoria continua X normalmente distribuida con media 3 y desviación típica 1.(0.5)

   (d) Una variable aleatoria continua X cuya función de densidad es $f(x) = 12x^2(1-x), \qquad x \in [0,1]$(0.75)