Examen Septiembre: Primer Parcial Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro 14 de Septiembre de 1999
NO SE PERMITEN NI APUNTES, NI FORMULARIOS
DURACIÓN: 4 horas

1. Demuestra que si A es simétrica y $\{\lambda_i\}$ son sus autovalores, entonces $\|A\|_2 = \text{máx}_{1\le i\le n} |\lambda_i|$.

2. Escribe una base para el espacio vectorial de los polinomios a trozos de orden dos $W_h^{(2)}$ en (a,b) para un malla $\mathcal{T}_h$ dada. Dibuje 3 de las funciones base.

3. Formule la solución del problema $-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0$, mediante polinomios trigonométricos. Note que en este caso el sistema de ecuaciones resultante es trivial de resolver porque es diagonal. Interprete las fórmulas que obtenga en términos de series de Fourier.

4. El número de condición de una matriz A (o del sistema lineal $A\,x = b$) se define $\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$. Demuestre que si A es simétrica, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ son sus autovalores y $\|\cdot\|$ es la norma 2, entonces
$$\kappa(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

5. Demuestre que la solución U del problema
$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$
para el M.E.F. cG(1) (en el espacio V_h) es exacta en los puntos x_j de la malla si $a \equiv 1$. Ayuda: muestre que el error $e = u - U$ se puede escribir
$$e(x) = \int_0^1 g_z'(x)\,e'(x)\,dx,$$
donde
$$g_z(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-z)\,x, & 0 \le x \le z, \\ z\,(1-x), & z \le x \le 1, \end{array} \right\}$$
y entonces use la ortogonalidad de Galerkin y el hecho de que $g_{x_j} \in V_h$ para $j = 1, \ldots, M$. ¿Se puede extender el resultado a $a(x)$ variable? ¿Qué falla en su demostración anterior?

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.