LOS DOS PARCIALES Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales (4º curso)
25 Noviembre de 2000 Extraordinario de Febrero (en Noviembre)
NO SE PERMITEN NI APUNTES, NI FORMULARIOS, NI CALCULADORA
DURACIÓN: 4:00 horas
Por Favor, Al Contestar, Que Quede Muy Claro A Qué Apartado Está Respondiendo Exactamente

1. Parte de Teoría (1 punto). Considere una región Ω en forma de triángulo equilátero de lado L con vértice izquierdo de la base $(0,0)$ y con vértice derecho de la base $(0,L)$; el tercer vértice tiene coordenada y positiva,

   a) ¿cuáles son sus coordenadas (x,y)? (0.1 puntos).

   b) Considere el problema (elíptico) de Poisson en dicho triángulo con condiciones de contorno de Dirichlet homogénea en el lado de la base y de Neumann homogéneas en los otros dos lados del triángulo. Escriba dicho problema, tanto la ecuación diferencial (0.2 puntos),

   c) como las condiciones de contorno (0.2 puntos).

   d) ¿Cuáles son los vectores normales a los lados del triángulo? (0.1 puntos).

   e) Considere a, b, y c como tres ejes en las direcciones de cada uno de los tres lados del triángulo. ¿Cuáles son las ecuaciones de estos vectores? (0.1 puntos).

   f) Exprese el operador laplaciano (0.2 puntos),

   g) y las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann homogéneas (0.1 puntos) utilizando como ejes de coordenadas a, b y c.

2. Parte de Problemas (3 puntos). Considere una malla de la región triangular Ω consistente en dividir cada uno de los tres lados en n partes iguales y trazar rectas paralelas a cada uno de los lados que pasen por los puntos obtenidos de la división anterior de los lados.

   a) Dibuje una figura del triángulo cuando $n = 3$ (0.2 puntos).

   b) ¿Cuántos triángulos tiene un mallado con n general? (0.3 puntos).

   c) Desarrolle un método en diferencias finitas centradas de segundo orden de consistencia que aproxime la ecuación de Poisson en los puntos de la malla anterior que son interiores al triángulo (0.5 puntos).

   d) Explique detalladamente la notación que ha utilizado para los índices de los puntos de la malla (0.2 puntos).

   e) Numere los nodos de la malla con dos índices i desde 0 a $n+1$ a lo largo del lado que une el punto $(0,0)$ y el vértice superior y j desde 0 a $n+1$ a lo largo del lado de la base (puntos $(0,0)$ al $(0,L)$). Escriba la expresión del método en diferencias centradas para la ecuación de Poisson con esta nueva notación de índices (0.3 puntos).

   f) Escriba un método numérico para tratar las condiciones de contorno de Dirichlet, y de Neumann con diferencias finitas centradas de segundo orden (0.3 puntos).

   g) Escriba dicho método con la notación de dos índices ($U_{i,j}$) anterior (0.2 puntos).

   h) Escriba en detalle (completo) el sistema lineal de ecuaciones ($A\,U = f$) que obtiene para $n = 2$, es decir, la matriz de coeficientes A (0.5 puntos),

   i) y el vector de coeficientes f (0.2 puntos).

   j) Cómo resolvería dicha ecuación mediante el método de SOR basado en Gauss-Seidel; detalle la formulación matricial de dicho problema y la formulación en componentes (0.2 puntos).

k) ¿Cómo determinaría que la solución ha convergido? Y, ¿en qué norma? (0.1 puntos).

3. Parte de Teoría (1 punto). Considere el problema de Poisson para la región rectangular del problema 1 con las condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas en la base del triángulo y Neumann homogéneas en los otros dos lados. Vamos a definir las formulaciones continuas de Galerkin y variacional.

   a) Defina un espacio vectorial W_b con producto interior completo (espacio de Hilbert) conveniente como espacio de búsqueda para la formulación de Galerkin continua de este problema (0.2 puntos). No es necesario demostrar que es de Hilbert.

   b) Defina un espacio de Hilbert W_p conveniente como espacio de prueba para la formulación de Galerkin continua de este problema (0.1 puntos).

   c) Escriba la formulación de Galerkin continua de este problema utilizando los espacios anteriores (0.2 puntos).

   d) Defina un espacio de Hilbert V_b conveniente como espacio de búsqueda para la formulación variacional continua de este problema (0.2 puntos).

   e) Defina una un espacio de Hilbert V_p conveniente como espacio de prueba para la formulación variacional continua de este problema utilizando los espacios anteriores (0.1 puntos).

   f) Escriba la formulación variacional continua de este problema (0.2 puntos).

4. Parte de Problemas (3 puntos). Considere la malla de triángulos definida en el ejercicio 2 utilizando la notación de dos índices (i, j) de dicho ejercicio para numerar todos los nodos de la malla. Vamos a aplicar un método de elementos finitos para la ecuación de Poisson en dicha malla.

   a) Para ello comenzaremos definiendo el espacio de polinomios a trozos (bi-)lineales, continuos, en dicha malla V_h. ¿Cuál es la dimensión de dicho espacio? (0.1 puntos).

   b) Escriba el desarrollo de una función cualquiera en una base de dicho espacio (utilice los dos índices (i, j) como índices de la base) (0.1 puntos).

   c) Escriba la expresión de una función base asociada a un punto interior del triángulo (0.5 puntos).

   d) Escriba la expresión de una función base asociada a un punto del lado de la base del triángulo (0.1 puntos),

   e) del lado izquierdo (0.1 puntos),

   f) y del lado derecho (0.1 puntos).

   g) Escriba un espacio de búsqueda adecuado para la formulación variacional discreta de este problema (0.2 puntos).

   h) Escriba un espacio de prueba adecuado para este problema (0.2 puntos).

   i) ¿Cuál es la dimensión de los espacios de prueba y de búsqueda? ¿Coincide? ¿Por qué? (Razona tu respuesta) (0.1 puntos)

   j) Escribe la formulación variacional discreta (para una función general del espacio de prueba) (0.2 puntos).

   k) Escribe la formulación variacional discreta (para una función base concreta del espacio de prueba) (0.2 puntos).

l) Determina el problema algebraico a resolver, resultado de la formulación variacional anterior (detalla las integrales sin hacerlas explícitamente), tanto la matriz de coeficientes (0.2 puntos),

m) como el vector no homogéneo (0.1 puntos).

n) Para la fila de la matriz de coeficientes cuyo elemento diagonal es el elemento de índice (i, j), siendo éste un vértice interior a la región triangular, calcula todas las integrales (0.4 puntos).

ñ) Para la última fila de la matriz de coeficientes, calcula todas las integrales (0.4 puntos).

Parte de Teoría (0.8 puntos) y Problemas (1.2 puntos). Podemos determinar los puntos mínimos de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, sujeta a que $x \in \Omega$, donde Ω es el triángulo del problema 1 con lado $L = 3$.

a) Escriba en forma de restricciones lineales la pertenencia de x a dicho triángulo (0.2 puntos).

b) Escriba la lagrangiana para este problema (0.2 puntos),

c) y todas las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema (0.4 puntos).

d) Aplique el método de Kuhn-Tucker a la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 5$: Determine la lagrangiana y las condiciones de Kuhn-Tucker (0.1 puntos);

e) resuelva las ecuaciones de igualdad y obtenga todos los puntos candidatos a óptimos (0.3 puntos);

f) ¿cuáles satisfacen las condiciones de desigualdad? (0.1 puntos);

g) ¿cuál es el mínimo?, ¿es global? (0.1 puntos).

h) Aplique el método de Kuhn-Tucker a la función $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 3xy$: Determine la lagrangiana y las condiciones de Kuhn-Tucker (0.1 puntos);

i) resuelva las ecuaciones de igualdad y obtenga todos los puntos candidatos a óptimos (0.3 puntos);

j) ¿cuáles satisfacen las condiciones de desigualdad? (0.1 puntos);

k) ¿cuál es el mínimo?, ¿es global? (0.1 puntos).