SOLO PRIMER PARCIAL — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.

Nombre del Alumno: DNI:

NO SE PERMITEN NI APUNTES, NI FORMULARIOS, NI CALCULADORA

DURACIÓN: 3:30 horas PUNTUACIÓN:

1. Vamos a determinar una base del espacio vectorial de los polinomios a trozos de orden dos $V_h^{(2)}$ en (a, b) para un malla $\mathcal{T}_h$ dada.

   a) Escribe una malla no uniforme del intervalo (a, b) con $N + 1$ nodos $\{x_k\}_{k=0}^{N}$.

   $$I_k =$$

   $$h(x) =$$

   b) Escribe una base nodal $\{\phi_i(x)\}$ del espacio $\mathcal{P}^{(2)}(I_k)$ de polinomios a trozos en el intervalo I_k.

   $$\phi_1(x) =$$

   c) Cómo se desarrolla una función de $f(x) \in \mathcal{P}^{(2)}(I_k)$ en la base anterior.

   $$f(x) =$$

d) Escribe una base nodal $\{\phi_i(x)\}$ para el espacio vectorial de los polinomios a trozos de orden dos $W_h^{(2)}$ en (a,b) para la malla anterior (dibuje cada función) .

$$\psi_1(x) =$$

e) Cómo se desarrolla una función de $f(x) \in W_h^{(2)}$ en la base anterior.

$$f(x) =$$

f) Escribe una base para el espacio vectorial de los polinomios a trozos de orden dos $V_h^{(2)}$ en (a,b) para la malla anterior (dibuje cada función).

$$\Psi_1(x) =$$

g) Cómo se desarrolla una función de $f(x) \in V_h^{(2)}$ en la base anterior.

$$f(x) =$$

2. Para la ecuación parabólica auto-adjunta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = t = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t), \quad u(x,0) = u_0(x),$$

podemos usar un método de Crank-Nicolson aplicado a la semi-discretización (sólo espacial) auto-adjunta

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x^2}\delta_x(a_i\delta_x)u_j(t),$$

donde δ_x es el operador en diferencias $E^{1/2} - E^{-1/2}$, y $Eu_j = u_{j+1}$.

a) Detalla la expresión del método de Crank-Nicolson semi-discreto.

b) Desarrolla los operadores en diferencias y detalla la ecuación en diferencias parciales resultante del método.

c) Cuál es el orden de consistencia de este método.

d) Detalla sus términos del error de truncado.

e) Detalla un tratamiento para las condiciones iniciales que tenga el mismo orden de consistencia que el método.

f) Detalla un tratamiento para las condiciones contorno que tenga el mismo orden de consistencia que el método.

g) Suponiendo $a(x)$ constante, aplica el método de von Neumann para el análisis de la estabilidad del método.

h) ¿Podrías estudiar la estabilidad del método completo incluyendo condiciones de contorno utilizando el método de von Neumann?

¿SI o NO?

i) Detalla la aplicación del método de Newton para la resolución de las ecuaciones del método de Crank-Nicolson completamente discreto.