Examen FINAL Segundo Parcial Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Nombre del Alumno: DNI:
NO SE PERMITEN NI APUNTES, NI FORMULARIOS, NI CALCULADORA
DURACIÓN: 3:30 horas PUNTUACIÓN:

1. Determina los puntos óptimos de la función

$$x + x^2 - 2\,x\,y - \left(x - y^2\right)\,z.$$

   a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0, 0, 1), \qquad (1/4, 1/2, 1/2), \qquad (1, 1, 1).$$

   b) Para el punto crítico de menor $|x|$.

      1) Evalúe el determinante de la matriz hessiana.

$$-2$$

      2) Tienen todos los autovalores de la matriz hessiana el mismo signo (¿cuál es?).

NO

      3) Es un máximo, mínimo o punto de silla.

punto de silla

   c) Para el punto crítico de mayor $|z|$.

      1) Evalúe el determinante de la matriz hessiana.

$$-2$$

      2) Tienen todos los autovalores de la matriz hessiana el mismo signo (¿cuál es?) .

NO

      3) Es un máximo, mínimo o punto de silla.

punto de silla

2. Resuelva el problema

$$\text{min.} \quad (y-2)^2 - (x-2)^2, \qquad \text{S.A.} \quad x \geq y, \quad x + y \leq 2,$$

   donde x e y no están restringidas en signo.

   a) Escriba la lagrangiana de este problema:

$$(x-2)^2 - (y-2)^2 - \lambda_1(y-x) - \lambda_2(x+y-2).$$

   b) Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema:

      1) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto las variables del problema:

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2(x-2) = 0,$$
$$-\lambda_1 - \lambda_2 - 2(y-2) = 0.$$

2) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto a los multiplicadores de Lagrange:

$$x \geq y, \qquad 2 \geq x + y,$$

3) Las condiciones de activación/desactivación de restricciones:

$$\lambda_1(x - y) = 0, \qquad \lambda_2(2 - x - y) = 0,$$

4) Las condiciones relativas a los signos de variables y multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

c) Determine las soluciones $(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ de las condiciones de Kuhn-Tucker de igualdad:

1) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(2, 2, 0, 0).$$

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

$$(2, 2, 0, 0).$$

3) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(1, 1, 2, 0), \qquad (2 - \lambda_1/2, 2 - \lambda_1/2, \lambda_1, 0)$$

4) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

no hay solución

d) Cuales de las soluciones anteriores son mínimos locales de este problema:

$$(2 - \lambda_1/2, 2 - \lambda_1/2, \lambda_1, 0), \qquad \lambda_1 \geq 2.$$

e) La región factible de este problema es un conjunto compacto.

SI.

f) Cuál es el mínimo global de este problema:

Hay infinitos (con F=0): $(2 - \lambda_1/2, 2 - \lambda_1/2, \lambda_1, 0), \quad \lambda_1 \geq 2.$

3. Consideremos una empresa de muebles que fabrica estanterías (EST), mesas (MES) y sillas (SIL), a un precio por unidad de 6, 3 y 2 Mil Ptas/unidad, respectivamente. Cada uno de estos productos requiere una serie de horas de trabajo en los departamentos de gestión de la madera (MAD), carpintería (CAR) y ebanistería (EBA), en los que tiene 5, 4y 3 empleados, respectivamente, que trabajan 40 horas semanales durante 5 días. La siguiente tabla indica las horas que cada producto requiere en cada departamento:

	EST	MES	SIL
MAD	8	6	1
CAR	4	3	1
EBA	4	2	2

Queremos maximizar el beneficio diario de la empresa. Para ello plantearemos un problema de programación lineal:

a) Determine las variables de decisión para este problema:

$$x_i = \text{núm. de unidades fabricadas de tipo } i,$$

donde i=1 para EST, 2 para MES y 3 para SIL.

b) Función objetivo (maximizar beneficios en Miles Ptas. diarios)

$$\text{Max } 6x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

c) Restricciones para el problema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 32 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

d) Aplicando el método del SIMPLEX determina la solución de este problema $(\cdots x_i \cdots ; z)$:

$$(14/3, 0, 8/3; 100/3)$$

e) Considere el problema dual. Escriba sus variables de decisión e interprete su significado:

$$y_i = \text{coste para la empresa de las horas de trabajo de los}$$
$$\text{trabajadores de la sección } i\text{-ésima (EST, CAR, ACA)}$$

f) Describa la función objetivo del problema dual

$$\text{Max } 40y_1 + 32y_2 + 24y_3,$$

g) Restricciones para el problema

$$\begin{aligned} 8y_1 + 4y_2 + 4y_3 &\geq 6 \\ 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\geq 3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 &\text{ vars. nrs (o srp)} \end{aligned}$$

h) Determine la solución del problema dual $(\cdots y_i \cdots ; z)$:

$$(1/3, 0, 5/6; 11/3)$$

4. Consideremos el problema del inventario de una empresa que fabrica barcos de vela. La demanda que recibe durante el año, que satisface semestre a semestre, es

Semestre	1	2
Demanda	40	60

Al comienzo del primer semestre la empresa dispone un stock de 10 barcos. Durante cada semestre puede producir hasta 40 barcos por semestre, con un coste por barco de 400 Mil Ptas por barco.

Si se produce un barco usando horas extra esto supone un incremento de 50 Mil Ptas.

Al final de cada semestre, los barcos que no vende los almacena y el coste de almacenaje es de 20 Mil Ptas por barco, independiente de si el barco se ha fabricado durante el comienzo del semestre o al final del mismo.

Determinaremos un plan de producción que minimice la suma de los costes de producción e inventario durante el primer año (primeros dos semestres). Para ello vamos a utilizar un problema de programación lineal para minimizar el coste anual:

a) Describa las variables de decisión que utilizaría en este problema:

$$x_i = \text{núm. barcos producidos a coste normal en semestre } i,$$

$$y_i = \text{núm. barcos producidos a coste extra en semestre } i,$$

$$z_i = \text{núm. barcos almacenados al final del semestre } i,$$

b) Describa la función objetivo (minimizar coste anual en Miles de Ptas.)

$$\text{coste} = 400(x_1 + x_2) + 450(y_1 + y_2) + 20(z_1 + z_2),$$

c) Describa las restricciones de este problema

$$z_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40 \;\Rightarrow\; x_1 + x_3 - x_5 = 30,$$
$$z_2 = z_1 + x_2 + y_2 - 60 \;\Rightarrow\; x_2 + x_4 + x_5 - x_6 = 60,$$

d) Describa la primera tabla del método del SIMPLEX aplicado al problema

			-400	-400	-450	-450	-20	-20	0	0	0	0
$BASE$	C_B	SFB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_7	0	30	1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0
x_8	0	30	1	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0
x_9	0	60	0	1	0	1	1	-1	0	0	1	0
x_{10}	0	60	0	1	0	1	1	-1	0	0	0	-1
		0	400	400	450	450	20	20	0	0	0	0

e) Indique cuál es la solución óptima de este problema $(\cdots x_i \cdots ; z)$ (Note que no es necesario resolver el problema por el SIMPLEX, pero que si lo hace, dada su longitud deje este problema para el último del examen):

$$(30, 60, 0, 0, 0, 0; 36000).$$