Examen Primer Parcial — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — Sábado, 4 de Marzo de 2000
NO SE PERMITEN NI APUNTES, NI FORMULARIOS

DURACIÓN: 4 horas

1. Desarrolle el método de elementos finitos cG(1) (polinomios lineales a trozos continuos) para la ecuación de Poisson con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en un cuadrado unidad con una triangulación estándar: (1) indique el mallado espacial que ha utilizado, (2) los espacios vectoriales de polinomios lineales a trozos continuos, (3) la formulación de Galerkin de residuos ponderados y la formulación variacional en el caso continuo, (4) la formulación de Galerkin de residuos ponderados y la formulación variacional en el caso discreto, (5) determine la matriz (A) del sistema lineal ($A\Xi = b$) que se obtiene y el término no homogéneo (b). ¿Es la matriz simétrica? ¿Es definida positiva? ¿Cómo implementarías este método de elementos finitos mediante un programa de ordenador?

2. Especifica una malla $\mathcal{T}_h$ del intervalo $(a,b) \in \mathbb{R}$. Escribe una base para el espacio vectorial de los polinomios a trozos de orden dos $W_h^{(2)}$ para la malla $\mathcal{T}_h$. Dibuja tres de las funciones base. Escribe una base nodal $\{\phi_i\}$ para el espacio de polinomios cuadráticos a trozos continuos $V_h^{(2)}$ en (a,b) con la malla dada. Dibuja dos de las funciones base.

3. Determina la solución de la ecuación de difusión bi-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \Omega \equiv (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad \forall y \in (0,1), \quad t > 0,$$

$$u'(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \quad \forall x \in (0,1), \quad t > 0,$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Ayuda: Utiliza separación de variables, primero en espacio y tiempo, y luego para las dos variables espaciales. El resultado final será en series de Fourier bi-dimensionales.

4. Para la ecuación parabólica auto-adjunta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = t = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t), \quad u(x,0) = u_0(x),$$

podemos usar un método de Crank-Nicolson aplicado a la semi-discretización (sólo espacial) auto-adjunta

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x^2}\delta_x(a_i\delta_x)u_j(t),$$

donde δ_x es el operador en diferencias $E^{1/2} - E^{-1/2}$, y $Eu_j = u_{j+1}$. Detalla la expresión del método de Crank-Nicolson. Desarrolla los operadores en diferencias y detalla la ecuación en diferencias parciales resultante del método. Cuál es el orden de consistencia de este método. Detalla sus términos del error de truncado. Detalla un tratamiento para las condiciones iniciales y de contorno que tenga el mismo orden de consistencia que el método. Suponiendo $a(x)$ constante, aplica el método de von Neumann para el análisis de la estabilidad del método. ¿Podrías estudiar la estabilidad del método completo incluyendo condiciones de contorno utilizando el método de von Neumann? ¿Cómo estudiarías la estabilidad del método completo incluyendo condiciones de contorno? ¿Cómo implementarías el método de Crank-Nicolson mediante un programa de ordenador?

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 3, 2, 2, 3.