Examen Segundo Parcial (TIPO A) Métodos Matemáticos y T. C.

Nombre del Alumno: DNI:

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas PUNTUACIÓN DE PROBLEMAS: 5, 5.

1. Resuelva el problema

$$\text{mín.} \quad x - y, \qquad \text{S.A.} \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad x, y \geq 0.$$

a) Escriba la lagrangiana de este problema:

$$L(x, y; \lambda_1, \lambda_2) = -x + y - \lambda_2 \left(1 - x^2 - y^2\right) - \lambda_1 \left(-4 + x^2 + y^2\right)$$

b) Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema:

1) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto las variables del problema:

$$-1 - 2\,\lambda_1\,x + 2\,\lambda_2\,x \leq 0,$$
$$1 - 2\,\lambda_1\,y + 2\,\lambda_2\,y \leq 0,$$

2) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto a los multiplicadores de Lagrange:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0,$$
$$-1 + x^2 + y^2 \geq 0,$$

3) Las condiciones de igualdad:

$$x\,(-1 - 2\,\lambda_1\,x + 2\,\lambda_2\,x) = 0,$$
$$y\,(1 - 2\,\lambda_1\,y + 2\,\lambda_2\,y) = 0,$$
$$\lambda_1 \left(4 - x^2 - y^2\right) = 0,$$
$$\lambda_2 \left(-1 + x^2 + y^2\right) = 0,$$

4) Las condiciones relativas a los signos de variables y multiplicadores de Lagrange:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

c) Determine las soluciones $(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ de las condiciones de Kuhn-Tucker de igualdad:

1) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(0, 0, 0, 0).$$

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

$$(0, 1, 0, -\left(\frac{1}{2}\right)), \qquad (-1, 0, 0, -\left(\frac{1}{2}\right)),$$

$$(0, -1, 0, \frac{1}{2}), \qquad (1, 0, 0, \frac{1}{2}),$$

$$(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)), \qquad (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

3) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(0, -2, -\left(\frac{1}{4}\right), 0), \qquad (2, 0, -\left(\frac{1}{4}\right), 0),$$

$$(0, 2, \frac{1}{4}, 0), \qquad (-2, 0, \frac{1}{4}, 0),$$

$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0), \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$$

4) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

no hay solución

d) Cuales de las soluciones anteriores cumplen las restricciones de los signos:

$$(0, 0, 0, 0), \qquad (0, 2, \frac{1}{4}, 0), \qquad (1, 0, 0, \frac{1}{2}).$$

e) Cuales de las soluciones anteriores son mínimos locales de este problema:

$$(0, 2, \frac{1}{4}, 0).$$

f) La región factible de este problema es un conjunto compacto.

SI.

g) Cuál es el mínimo global de este problema:

$$(0, 2, \frac{1}{4}, 0).$$

2. Dos productos se fabrican en tres máquinas. Cada producto requiere un número total de horas que viene dado por la tabla siguiente:

	MAQ.		
PROD.	1	2	3
1	1	1	2
2	2	1	1

El total de horas disponibles en cada máquina es de 10, 6, y 10, respectivamente, y los productos se venden a 15 y a 20 ptas., respectivamente.

a) Si queremos maximizar el beneficio, formule un problema de programación lineal que modele este problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 15x_1 + 20x_2, \\ \text{S.A.} & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

b) Aplique el método del SIMPLEX y escriba la última tabla que obtiene.

			15	20	0	0	0
$BASE$	C_B	SFB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	20	4	0	1	1	-1	0
x_1	15	2	1	0	-1	2	0
x_5	0	2	0	0	1	-3	1
		110	0	0	5	10	0

c) Escriba la solución $(x_1, x_2; z_{opt})$ que ha obtenido.

$$(2, 4; 110).$$

d) Escriba el problema dual asociado en forma estándar (recuerde Max, $Ax = b$ y $b > 0$).

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & -10y_1 - 6y_2 - 10y_3, \\ \text{S.A.} & y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 \qquad + y_6 \qquad = 15, \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 \qquad - y_5 \qquad + y_7 = 20, \end{array}$$

e) Aplique el método del SIMPLEX y escriba la última tabla que obtiene.

			-10	-6	-10	0	0
$BASE$	C_B	SFB	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_2	-6	10	0	1	3	-2	1
y_1	-10	5	1	0	-1	1	-1
		-110	0	0	2	2	4

f) Escriba la solución $(y_1, y_2, y_3; z)$ del problema dual.

$$(5, 10, 0; 110).$$

g) La restricción asociada a la máquina 3 está activa o inactiva. ¿Cómo es su precio dual? ¿Qué significa?

inactiva, 0,

significa que incrementar las horas disponibles no aumenta el beneficio,

se usan 8 horas de las 10 disponibles

h) ¿Cómo interpretarías el precio dual de la restricción de la máquina i en este problema?

es la cantidad máxima que la compañía pagaría por disponer

de una hora más de la máquina i.

i) ¿Cuál sería el beneficio si se dispusiera de dos horas más de la máquina 1? ¿y con 2 menos?

$$120, \qquad 100.$$

j) Determine el intervalo para el número de horas disponibles para la primera máquina que no altera los precios duales que ha obtenido.

$$b_1 \in [8, 12]$$

k) Analice la sensibilidad para los recursos b_2 y b_3 del problema original y determine sendos intervalos en los que el vértice solución sigue siéndolo.

$$b_2 \in [5, 20/3], \qquad b_3 \in [8, \infty).$$

l) Analice la sensibilidad de los costos c_i del problema original y determine sendos intervalos en los que el vértice solución sigue siéndolo.

$$c_1 \in [10, 20], \qquad c_2 \in [15, 30].$$

. FECHA Y FIRMA