Examen Segundo Parcial — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 27 de Junio de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
DURACIÓN 3:30 horas

1. Determina los puntos óptimos de la función

$$-x - 2\,x^2 + 2\,x\,y - y^2 - z^2 + y\,z^2.$$

   a) Determine todos sus puntos críticos.

   $$(-1/4, 0, 0), \qquad (3/8, -\sqrt{5}/2, -\sqrt{5}/4), \qquad (3/8, \sqrt{5}/2, \sqrt{5}/4).$$

   b) Para el punto crítico de menor $|z|$.

      1) Evalúe el determinante de la matriz hessiana.

      $$-20$$

      2) Tienen todos los autovalores de la matriz hessiana el mismo signo (¿cuál es?).

      SÍ, negativos

      3) Es un máximo, mínimo o punto de silla.

      máximo

   c) Para el punto crítico de mayor $|z|$.

      1) Evalúe el determinante de la matriz hessiana.

      $$40$$

      2) Tienen todos los autovalores de la matriz hessiana el mismo signo (¿cuál es?) .

      NO

      3) Es un máximo, mínimo o punto de silla.

      punto de silla

2. Resuelva el problema

$$\text{Max.} \quad x - y^2, \qquad \text{S.A.} \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y - x \geq -2, \quad x, y \geq 0.$$

a) Escriba la lagrangiana de este problema:

$$x^2 + y^2 - \lambda_1(x^2 + y^2 - 4) - \lambda_2(y - x - 2).$$

b) Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema:

1) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto las variables del problema:

$$\begin{aligned} &\lambda_2 + 2x - 2\lambda_1 x \leq 0, \\ &-\lambda_2 + 2y - 2\lambda_1 y \leq 0, \end{aligned}$$

2) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto a los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} &4 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ &2 + x - y \geq 0, \end{aligned}$$

3) Las condiciones de igualdad:

$$\begin{aligned} &x(\lambda_2 + 2\ x - 2\ \lambda_1\ x) = 0, \\ &y(-\lambda_2 + 2\ y - 2\ \lambda_1\ y)) = 0, \\ &\lambda_1\ (4 - x^2 - y^2) = 0, \\ &\lambda_2\ (2 + x - y) = 0, \end{aligned}$$

4) Las condiciones relativas a los signos de variables y multiplicadores de Lagrange:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

c) Determine las soluciones $(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ de las condiciones de Kuhn-Tucker de igualdad:

1) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(0, 0, 0, 0).$$

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

$$(0, 2, 0, -4), \qquad (-2, 0, 0, -1), \qquad (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1),$$

3) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{15}}{2}, -1, 0), \qquad (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}, -1, 0),$$
$$(0, -2, -1, 0), \qquad (0, 2, -1, 0),$$
$$(-2, 0, -\frac{1}{4}, 0), \qquad (2, 0, \frac{1}{4}, 0)$$

4) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

$$(-2, 0, \lambda_1, -1-4\,\lambda_1), \qquad (0, 2, \lambda_1, -4\,(1+\lambda_1)), \qquad (0, 2, -\frac{3}{4}, -1),$$

d) Cuales de las soluciones anteriores cumplen las restricciones de los signos:

$$(0, 0, 0, 0), \qquad (2, 0, \frac{1}{4}, 0).$$

e) Cuales de las soluciones anteriores son mínimos locales de este problema:

$$(2, 0, \frac{1}{4}, 0).$$

f) La región factible de este problema es un conjunto compacto.

SI.

g) Cuál es el mínimo global de este problema:

$$(2, 0, \frac{1}{4}, 0).$$

3. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 - x_2, \\ \text{S.A.} & x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ & 0 \leq x_2 \leq 2, \qquad x_1 \geq 0. \end{array}$$

a) Resuelva este problema por el método de la M-grande. ¿Cuál es la última tabla que obtiene?

			1	-1	0	0	0	$-M$
$BASE$	C_B	SFB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	5	0	3	2	1	0	$-$
x_5	0	2	0	1	0	0	1	$-$
x_1	1	3	1	1	1	0	0	$-$
		3	0	2	1	0	0	$-$

NOTA: ($-$ significa que no importa su valor)

b) ¿Cuál es la solución óptima que obtiene $(x_1, x_2; z)$?

$$(3, 0; 3)$$

c) Resuelva este problema por el método de las dos fases. ¿Cuál es la última tabla que obtiene (tras la segunda fase)?

			1	-1	0	0	0
$BASE$	C_B	SFB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	0	5	0	3	2	1	0
x_1	1	3	1	1	1	0	0
x_5	0	2	0	1	0	0	1
		3	0	2	1	0	0

d) ¿Cuál es la solución óptima que obtiene $(x_1, x_2; z)$?

$$(3, 0; 3)$$

e) Elimine la restricción $x_2 \geq 0$, es decir, considere que x_2 no está restringida en signo. Resuelva el problema resultante con el método de la M-grande. ¿Qué solución obtiene?

Solución no acotada (o ilimitada).

f) Considere que x_2 no está restringida en signo y cambie el problema de maximizar (Max) a minimizar (min) la función objetivo. Resuelva el problema mediante el método de la M-grande. ¿Qué solución obtiene?

$$(4/3, 5/3, 0; -1/3)$$

4. Resuelva el problema de Programación Entera

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + 5x_2, \\ \text{S.A.} & 11x_1 + 6x_2 \leq 66, \\ & x_1 + 10x_2 \leq 45, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array}$$

Utilice el algoritmo de Ramificación-Acotación (Branch & Bound).

a) ¿Cuál es la solución del problema con números reales?

$$(15/4, 33/8, 195/8) \equiv (3{,}75, 4{,}125; 24{,}375)$$

b) Ramifique para $\lfloor x_1 \rfloor$ (número entero más cercano de menor módulo). Cuál es la solución que obtiene. ¿Tiene que ramificarla?.

$$(3,\ 21/5; 24) \equiv (3,\ 4{,}2;\ 24); \qquad \text{SI}$$

c) Ramifique para $\lceil x_1 \rceil$ (número entero más cercano de menor módulo). Cuál es la solución que obtiene. ¿Tiene que ramificarla?.

$$(4,\ 11/3;\ 67/3) \equiv (4,\ 3{,}66666;\ 22{,}33333); \qquad \text{NO}$$

d) Ramifique para $\lceil x_2 \rceil$. Cuál es la solución que obtiene. ¿Tiene que ramificarla?.

Sin solución o problema no factible; NO

e) Ramifique para $\lfloor x_2 \rfloor$. Cuál es la solución que obtiene. ¿Tiene que ramificarla?.

$(3,\ 4;\ 23)$; NO; SOLUCION NATURAL

f) ¿Cuál es la solución final que ha obtenido?

$$(3,\ 4;\ 23)$$

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.