SOLO SEGUNDO PARCIAL — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 14 de Septiembre de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
DURACIÓN 3:30 horas

1. Determina los puntos óptimos de la función

$$x + x^2 + 3\,x\,z - z^2 + \sin^2(y).$$

   a) Determine todos sus puntos críticos.

   $$(-2/13, k\pi, -3/13), \qquad (-2/13, \pi/2 + k\pi, -3/13), \qquad \forall k \in \mathrm{Z}.$$

   b) Para el punto crítico de menor $|y|$.

      1) Evalúe el determinante de la matriz hessiana.

      $$-26$$

      2) Tienen todos los autovalores de la matriz hessiana el mismo signo (¿cuál es?).

      NO

      3) Es un máximo, mínimo o punto de silla.

      punto de silla

   c) Para el punto crítico de menor y positivo.

      1) Evalúe el determinante de la matriz hessiana.

      $$26$$

      2) Tienen todos los autovalores de la matriz hessiana el mismo signo (¿cuál es?) .

      NO

      3) Es un máximo, mínimo o punto de silla.

      punto de silla

2. Resuelva el problema

$$\text{Max.} \quad x^2 + (y-2)^2, \qquad \text{S.A.} \quad x + y \leq 0, \quad x \leq 2,$$

donde x e y no están restringidas en signo.

a) Escriba la lagrangiana de este problema:

$$x^2 + (y-2)^2 - \lambda_1(x+y) - \lambda_2(x-2).$$

b) Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema:

1) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto las variables del problema:

$$-\lambda_1 - \lambda_2 + 2x = 0, \qquad -\lambda_1 + 2(-2+y) = 0$$

2) Las condiciones relativas a las derivadas de la Lagrangiana respecto a los multiplicadores de Lagrange:

$$-x - y >= 0, 2 >= x.$$

3) Las condiciones de activación/desactivación de restricciones:

$$\lambda_1(-x-y) = 0, \lambda_2(2-x) = 0.$$

4) Las condiciones relativas a los signos de variables y multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

c) Determine las soluciones $(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ de las condiciones de Kuhn-Tucker de igualdad:

1) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(0, 2, 0, 0).$$

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

$$(2, 2, 0, 4).$$

3) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$:

$$(-1, 1, -2, 0).$$

4) Para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$:

$$(2, -2, -8, 12).$$

d) Cuales de las soluciones anteriores son máximos locales de este problema:

ninguno.

e) La región factible de este problema es un conjunto compacto.

SI.

f) Cuál es el mínimo global de este problema:

no lo hay.

3. Considere el problema de programación lineal

$$\min \quad 15x_1 + 10x_2, \qquad x_1, x_2 \geq 0,$$

$$\text{S.A.} \quad 3x_1 + 5y_2 \geq 11 \equiv b_1, \quad 5y_1 + 2y_2 \geq 4 \equiv b_2,$$

a) Aplique el método de las dos fases para resolver este problema. Cuál es la primera tabla SIMPLEX de la segunda fase (tras finalizar la primera fase):

			-15	-10	0	0
$BASE$	C_B	SFB	y_1	y_2	y_3	y_4
y_4	0	$2/5$	$-19/5$	0	$-2/5$	1
y_2	-10	$11/5$	$3/5$	1	$-1/5$	0
		-22	9	0	2	0

b) Cuál es la última tabla SIMPLEX de la segunda fase:

			-15	-10	0	0
$BASE$	C_B	SFB	y_1	y_2	y_3	y_4
y_4	0	$2/5$	$-19/5$	0	$-2/5$	1
y_2	-10	$11/5$	$3/5$	1	$-1/5$	0
		-22	9	0	2	0

c) Cuál es la solución de este problema $(x_1, x_2; z)$:

$$(11/5, 2/5; 22)$$

d) Cuál es la solución del problema dual de este problema $(y_1, y_2; z)$:

$$(2, 0; 22)$$

e) Analice la sensibilidad de los recursos de este problema y obtenga intervalos que mantengan el vértice óptimo:

$$b_1 \in [10, \infty), \qquad b_2 \in (-\infty, 22/5],$$

f) Analice la sensibilidad de los costes de este problema y obtenga intervalos que mantengan el vértice óptimo:

$$c_1 \in [6, \infty), \qquad c_2 \in [0, 25],$$

g) Cuál es el incremento Δz en la solución óptima para $b_1 = 10$ y para $b_2 = 3$

$$\Delta z = 20 - 22 = -2$$

h) Cuál es el incremento Δz en la solución óptima para $b_1 = 1$ y para $b_2 = 3$

$$\Delta z = 9 - 22 = -13$$

4. Tenemos que suministrar electricidad a cuatro grandes ciudades (A, B, C, y D) a partir de tres centrales distintas (1, 2 y 3). Cada ciudad tiene una demanda de potencia eléctrica (DEM en MKw/h) y cada central una potencia máxima suministrable (SUM en MKw/h). El coste del transporte de esta electricidad entre las centrales y las ciudades es

	A	B	C	D	SUM
1	8	6	10	9	35
2	9	12	13	7	50
3	14	9	16	5	40
DEM	45	20	30	30	125

a) Si queremos minimizar el coste del suministro de la electricidad, qué variables de decisión tenemos que tomar:

$$x_{ij} = \text{ MKw/h que suministra la central } i \text{ a la ciudad } j,$$

$$i \in \{1, 2, 3\}, \qquad j \in \{\text{A, B, C, D}\}, \qquad \text{Hay 12 variables}$$

b) ¿Cuál es la función objetivo a minimizar?

$$\begin{aligned} \min \quad z = {} & 8x_{1A} + 6x_{1B} + 10x_{1C} + 9x_{1D} \\ & + 9x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 7x_{2D} \\ & + 14x_{3A} + 9x_{3B} + 16x_{3C} + 5x_{3D}, \end{aligned}$$

c) Escriba las restricciones de suministro (note que el problema está equilibrado)

$$\begin{aligned} 8x_{1A} + 6x_{1B} + 10x_{1C} + 9x_{1D} &= 35, \\ 9x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 7x_{2D} &= 50, \\ 14x_{3A} + 9x_{3B} + 16x_{3C} + 5x_{3D} &= 40, \end{aligned}$$

d) Escriba las restricciones de demanda (note que el problema está equilibrado)

$$\begin{aligned} 8x_{1A} + 9x_{2A} + 14x_{3A} &= 45, \\ 6x_{1B} + 12x_{2B} + 9x_{3B} &= 20, \\ 10x_{1C} + 13x_{2C} + 16x_{3C} &= 30, \\ 9x_{1D} + 7x_{2D} + 5x_{3D} &= 30, \end{aligned}$$

e) Escriba otras restricciones que sean necesarias (si las hubiera)

$$\begin{aligned} x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{1D} &\geq 0, \\ x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{2D} &\geq 0, \\ x_{3A}, x_{3B}, x_{3C}, x_{3D} &\geq 0, \end{aligned}$$

f) Si quisiera resolver este problema mediante el método SIMPLEX, escriba la forma estándar de este problema (Max, $A = b$ y $x \geq 0$) minimizando el número de restricciones y variables de holgura x_{hi} (aproveche que el problema esta equilibrado):

$$\begin{aligned} \text{Maz} \quad z = {} & -8x_{1A} - 6x_{1B} - 10x_{1C} - 9x_{1D} \\ & - 9x_{2A} - 12x_{2B} - 13x_{2C} - 7x_{2D} \\ & - 14x_{3A} - 9x_{3B} - 16x_{3C} - 5x_{3D}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x_{1A} + 6x_{1B} + 10x_{1C} + 9x_{1D} + x_{h1} &= 35, \\ 9x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 7x_{2D} + x_{h2} &= 50, \\ 14x_{3A} + 9x_{3B} + 16x_{3C} + 5x_{3D} + x_{h3} &= 40, \end{aligned}$$

$$8x_{1A} + 9x_{2A} + 14x_{3A} - x_{h4} = 45,$$
$$6x_{1B} + 12x_{2B} + 9x_{3B} - x_{h5} = 20,$$
$$10x_{1C} + 13x_{2C} + 16x_{3C} - x_{h6} = 30,$$
$$9x_{1D} + 7x_{2D} + 5x_{3D} - x_{h7} = 30,$$

Nota: También es válida la solución con signos de las variables de holgura cambiados (de 1 a 3 negativos y de 4 a 7 positivos).

g) Crees que este problema tiene solución única.

SI, por simetría del grafo de transporte, los problemas de transporte

suelen tener múltiples soluciones óptimas.

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.