Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales 2/VII/2003
Completo **Duración: 3 horas**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Método de Dufort-Frankel para la ecuación del calor en dimensión espacial 1.

2. ¿Qué es una base nodal? Determina una base nodal para los polinomios de grado 3 en $[a, b]$ para los valores $p(a)$, $p(\frac{a+b}{2})$ y $p(b)$.

3. Formulación variacional del siguiente problema: hallar $u \in C^2(0, 1)$ tal que

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x)$$
$$\frac{du}{dx}(0) = u(1) = 3$$

4. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy

5. Enuncia el teorema dual.

6. Describe el método de las direcciones factibles. ¿Para qué problemas se utiliza?

7. Representa mediante un grafo una cadena de Markov cuyos estados son $\{1, 2, 3, 4\}$ y cuya matriz de probabilidades de transición es

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

8. Método de convolución para generar números aleatorios.

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO se permite el uso de libros, apuntes, tablas de transformadas, recetarios, "chuletas", etc.
NO se permite el uso de calculadora, sea ésta científica, programable o de cualquier otro tipo, ni de ordenador portátil o equivalente.

PROBLEMAS

1. Considere el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = g(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = h(t), \quad t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1).$$

donde $\alpha > 0$ es una constante.

(a) Describa el método de Crank-Nicholson para resolver este problema y el tratamiento de las condiciones de contorno. (0.5)

(b) Determine el error de truncado y el orden de consistencia de dicho método. (1.5)

(c) Estudie su estabilidad por el método de Von Neumann. (1)

2. Resuelve los siguientes problemas de optimización

(a) Maximizar

$$x_1 + x_2 + x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - x_3 \geq 2$$

$$x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(1.5 puntos)

(b) maximizar

$$f(x,y) = -2\,x^2 - y^2 + 3x + y$$

sujeto a

$$3x + y \leq 6,$$

$$x, y \geq 0$$

(1.5 puntos)