Examen Final de Métodos Matemáticos y Técnicas Computacionales 2/VII/2003
Primer Parcial **Duración: 3 horas**

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado)

1. Determina por el método de separación de variables la solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

2. ¿Qué es un método de líneas? ¿Para qué tipo de problemas se utilizan?

3. Método de Dufort-Frankel para la ecuación del calor en dimensión espacial 1.

4. ¿Qué es una base nodal? Determina una base nodal para los polinomios de grado 3 en $[a,b]$ para los valores $p(a)$, $p(\frac{a+b}{2})$ y $p(b)$.

5. Diferencias entre condiciones de contorno esenciales y condiciones de contorno naturales en cuanto a su tratamiento con un método de elementos finitos.

6. Formulación variacional del siguiente problema: hallar $u \in C^2(0,1)$ tal que

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x)$$
$$\frac{du}{dx}(0) = u(1) = 3$$

7. Método de Lax-Wendroff para la ecuación de ondas de segundo orden en dimensión espacial 1.

8. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy

OBSERVACIONES:

Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.

NO se permite el uso de libros, apuntes, tablas de transformadas, recetarios, "chuletas", etc.

NO se permite el uso de calculadora, sea ésta científica, programable o de cualquier otro tipo, ni de ordenador portátil o equivalente.

PROBLEMAS

1. Considere el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = g(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = h(t), \quad t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1).$$

donde $\alpha > 0$ es una constante.

   (a) Describa el método de Crank-Nicholson para resolver este problema y el tratamiento de las condiciones de contorno. (0.5)

   (b) Determine el error de truncado y el orden de consistencia de dicho método. (1.5)

   (c) Estudie su estabilidad por el método de Von Neumann. (1)

2. Considere el siguiente problema

$$\triangle u + u = 4, \qquad (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

con condiciones de contorno

$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 1, \qquad x, y \in [0,1]$$

   (a) Escriba la formulación variacional continua de este problema (1).

   (b) Describa el método de elementos finitos basados en funciones continuas lineales a trozos sobre una triangularización estándar del dominio Ω: triangularización(0.25), espacio de funciones(0.25), base de dicho espacio(0.5), problema a resolver (0.75) y forma de las matrices que determinan el sistema a resolver (0.25). NO ES NECESARIO DETERMINAR LOS VALORES NUMÉRICOS NO NULOS DE LAS MATRICES DE MASA Y RIGIDEZ NI EL VECTOR DE CARGA