Tercera práctica voluntaria — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 18 de Diciembre de 2000
PUNTUACIÓN : 0.3 puntos — FECHA ENTREGA: 21 de Febrero de 2001

Métodos Numéricos para Problemas de Valores Propios Elípticos.

Considere el siguiente problema de valores propios para la ecuación de Laplace en dos dimensiones espaciales

$$-\Delta u(x,y) + f(x,y)\, u(x,y) = \lambda\, u(x,y), \qquad -1 < x, y < 1,$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en el contorno.

1. Para $f = 0$, resuelva este problema por separación de variables y obtenga como autofunciones

$$\sin(k_x(x+1))\, \sin(k_y(y+1)),$$

donde k_x y k_y son múltiplos enteros de $\pi/2$, y como autovalores

$$\frac{\pi^2}{4}(i^2 + j^2), \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots.$$

A una autofunción dada por (k_x, k_y), ¿qué autovalor o autovalores le corresponden? Demuestre que si $i \neq j$, los autovalores tienen multiplicidad dos (están degenerados). ¿Qué significa todo esto matemática y físicamente? Cita algún/os problemas físicos que conozcas que conduzcan a un problema como el indicado, mostrando qué son f y λ en dichos problemas.

2. Sin embargo, para $f \neq 0$, no podemos obtener una solución analítica y, además, los autovalores dejan de estar degenerados, es decir, los autovalores de multiplicidad dos se convierten en un par de autovalores distintos. Desarrolle un método numérico en diferencias finitas, de segundo orden, basado en una malla uniforme de N^2 puntos para el problema elíptico anterior. Obtendrá un problema de valores propios de la forma $A\,U = \lambda\,U$. ¿Cuáles son los coeficientes de la matriz A y del vector U? ¿Es simétrica la matriz A? ¿Es definida positiva?

3. Consideremos el caso no perturbado $f(x,y) = 0$. Escriba un programa de Matlab para calcular los coeficientes de la matriz A. La solución de este problema la podemos obtener con los siguientes comandos de Matlab

```
[V,D] = eig(A); D = diag(D);
[D,ii] = sort(D); ii = ii(1:4); V=V(:,ii);
```

Explique el funcionamiento de estos comandos. ¿A qué autofunción corresponde `V(:,ii)`? La función `eig` usa el algoritmo para matrices no simétricas. Para matrices simétricas es más eficiente el algoritmo `eigs`. Compara la eficiencia de estos dos códigos para el problema anterior para $N = 16$, 32 y 64. Dibuja una gráfica comparativa. Justifica tus resultados.

4. Para $N = 16$, 32 y 64, compara los valores que obtienes para los primeros 8 autovalores del problema. ¿Cuáles son sus errores? ¿Cómo crecen los autovalores con su número ordinal? ¿Qué significa su crecimiento físicamente? Justifica tus respuestas.

5. Para dibujar la solución obtenida podemos recurrir al siguiente código de Matlab (donde los vectores `x` e `y` contienen los índices de los nodos de la malla, que debes calcular previamente)

```
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
mallafina = -1:.02:1;
[xxx,yyy] = meshgrid(mallafina,mallafina);
uu = zeros(N+1,N+1);
[ay,ax] = meshgrid([.56 .04],[.1 .5]); clf;
for i=1:4,
 uu(2:N,2:N) = reshape(V(:,i),N-1,N-1);
 uu = uu/norm(uu(:),inf);
 uuu = interp2(xx,yy,uu,xxx,yyy,'cubic');
 subplot('position', [ax(i) ay(i) .38 .38]);
 contour(mallafina,mallafina,uuu,-.9:.2:.9);
 colormap([0 0 0]); axis square;
 title(['eig = ' num2str(D(i)/(pi^2/4),'%18.12f') '\pi^2/4']);
end
```

Explique el funcionamiento de los comandos de cada línea de este código. Considera $N = 16$ y aplica el código anterior para dibujar los primeros cuatro autovalores y autofunciones. Comenta la simetría de dichas soluciones. ¿Qué significan físicamente? Cambia el código Matlab anterior para que dibuje los autovalores y autofunciones de ordinal

5 a 8. Cambia el código Matlab anterior para que aparezcan en una sola gráfica los 8 primeros autovalores y autofunciones. Comenta los resultados que has obtenido.

6. El caso no perturbado es demasiado sencillo. Considere el problema con $f(x, y) = \exp(20(y-x-1))$. ¿Cómo es esta función? ¿En qué parte del dominio es prácticamente cero? NOTA: esta función es una función barrera de las que estudiaremos en el segundo cuatrimestre para resolver numéricamente problemas no lineales de optimización con restricciones.

   Para $N = 16$, 32 y 64, compara los valores que obtienes para los primeros 8 autovalores del problema perturbado. ¿Cómo estimas estos errores? ¿Cuánto valen? ¿Cómo crecen los autovalores con su número ordinal? ¿Qué significa su crecimiento físicamente? Justifica tus respuestas. Estima la precisión de los autovalores que has obtenido (¿cuántos dígitos significativos tienen?).

7. Considera $N = 16$ y aplica el código anterior para dibujar los primeros cuatro autovalores y autofunciones del problema perturbado. Comenta la simetría de dichas soluciones. ¿Qué significan físicamente? Compara las nuevas autofunciones y autovalores con los del problema no perturbado e justifica sus diferencias.

8. Desarrolle un método numérico de elementos finitos, basado en polinomios a trozos lineales continuos, basado en una malla uniforme de N^2 puntos para el problema elíptico anterior. Obtendrá un problema de valores propios de la forma $A\,U = \lambda\,U$. ¿Cuáles son los coeficientes de la matriz A y del vector U? ¿Es simétrica la matriz A? ¿Es definida positiva?

9. Obtenga y compare los resultados de este método con los que ha obtenido con el método en diferencias finitas tanto para los casos no perturbado ($f = 0$) como perturbado. Es decir, repita gran parte de lo realizado, pero con elementos finitos.

10. ¿Cuál de los métodos numéricos es más preciso? ¿Cuál es más fácil de derivar? ¿Cuál más fácil de codificar? ¿Cuál más eficiente numéricamente?