Cuarta práctica voluntaria — Métodos Matemáticos y T.C.
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 15 de Enero de 2003
FECHA LÍMITE DE ENTREGA: Viernes 8 de marzo de 2003

ENUNCIADO DE LA CUARTA PRÁCTICA (PUNTUACIÓN: 0.25)

Resolución numérica de (sistemas de) ecuaciones hipérbolicas.

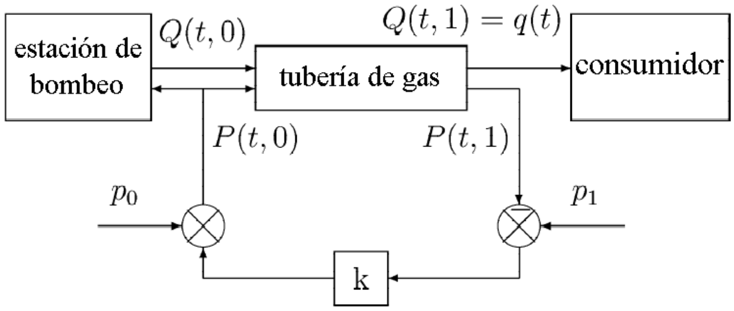

Figura. Sistema de distribución de gas natural con control proporcional (tipo P).

Cuestión 1. Considere el sistema de distribución de gas natural presentado en la figura, que consiste en una estación de bombeo, una tubería de gas suficientemente larga (p.ej. unos 200 km. en longitud y unos 70 cm. de diámetro) y un consumidor de gas (las viviendas de una pequeña ciudad). Supondremos que el flujo Q y la presión P de gas no difieren mucho de sus valores promedio, de forma tal que el gas en la tubería se pueda modelar mediante el sistema de ecuaciones hiperbólicas lineales

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/M \\ M & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix},$$

donde $\rho = \eta\, L\, M/D$ es la resistencia al flujo de gas, que depende del número de Mach M (que se toma pequeño $M \approx 0.01$), la longitud de la tubería L, el diámetro de ésta D, y el coeficiente constante η que depende del tipo de gas. Estamos suponiendo que todas las variables x, t, P y Q han sido convenientemente adimensionalizadas. La variable tiempo t se ha escalado con respecto al tiempo que una onda sonora necesita para recorrer toda la longitud de la tubería, desde el compresor en $x = 0$ hasta el consumidor final en $x = 1$. Las variables P y Q se han escalado respecto a los valores promedio de la presión y el flujo, respectivamente.

Como condición de contorno en el compresor tomaremos

$$P(t,0) - p_0 = k\,(p_1 - P(t,1)),$$

donde p_0 es la presión de gas nominal obtenida por el compresor, p_1 es la presión de gas nominal suministrada al consumidor, y k es el coeficiente del sistema de control proporcional utilizado. Este sistema trata de compensar la presión en la tubería en función de la presión requerida por el consumidor. Para ello, suministra una presión $P(t,0)-p_0$ que es proporcional (con constante k) a la diferencia $p_1 - P(t,1)$.

Nos falta otra condición de contorno más. Como condición de contorno para el consumidor tomaremos

$$Q(t,1) = q(t),$$

donde $q(t)$ es la variación temporal del gas consumido.

Como valores típicos para todos los parámetros adimensionales podemos tomar: $\rho = 20$, $M = 0.01$, $k = 0.5$, $p_0 = 1.1$, $p_1 = 0.9$. Para modelar el gas consumido tomaremos

$$q(t) = 1 + 0.1\,\sin(0.2\,t) - 0.01\,\sin(t), \qquad t \geq 0.$$

Como condición inicial ($t = 0$) podemos tomar

$$Q(0,x) = 1, \qquad P(0,x) = 1.1 - \rho\,M\,x, \qquad x \in [0,1].$$

Cuestión 1.1. Deduzca las ecuaciones del sistema previamente presentado. Se requieren conocimientos básicos de Mecánica de Fluidos aplicada a flujo en tuberías. Si le parece muy difícil, se permite omitir esta cuestión.

Cuestión 1.2. Demuestre que dicho sistema de ecuaciones es hipérbolico y encuentre sus curvas características.

Cuestión 1.3. Diagonalice dicho sistema de ecuaciones, es decir, aplique una transformación $(Q,P) \to (y_1, y_2) \equiv y$ tal que el sistema se escriba como

$$\frac{\partial y}{\partial t} + S\,\frac{\partial y}{\partial x} = A\,y,$$

donde S es una matriz diagonal. ¿Cuáles son S y A? Las condiciones de contorno se transformarán a la forma

$$\begin{pmatrix} y_1(t,1) \\ y_2(t,0) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1(t,0) \\ y_2(t,1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Determine la matriz B, y las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

Cuestión 2. Vamos a resolver numéricamente el problema anterior. Si ha logrado realizar las "fáciles" cuestiones anteriores, resuelva numéricamente el sistema obtenido en la cuestión 1.3 (en función de S y A). Si no lo ha logrado, también se permite el uso del sistema original. Recuerde que el sistema diagonal obtenido tras la cuestión 1.3 es más "fácil" de resolver numéricamente que el contradiagonal original.

Cuestión 2.1. Desarrolle un método numérico (explícito) de Lax-Wendroff para resolver numéricamente el problema anterior. ¿Cómo ha tratado las condiciones de contorno? Describa la condición de estabilidad (relación entre Δt y Δx) para dicho método en función de los parámetros del problema. Implemente dicho método en Matlab.

Cuestión 2.2. Presente gráficas de la solución para $t \in (0,25)$ utilizando una malla espacial con $1/\Delta x = 10, 25, 50, 100, 200$. ¿Qué Δt máximo puede utilizar que garantice la estabilidad en cada uno de dichos casos? Utilice como Δt la mitad de dicho valor.

Cuestión 2.3. Elija un Δx y un Δt adecuados para obtener una solución en $t \in (0, 250)$. Comente numéricamente, matemáticamente y físicamente los resultados que ha obtenido.

Cuestión 3.1. Desarrolle un método numérico (implícito) de Crank-Nicolson, basado en una discretización de segundo orden centrada para la derivada espacial de segundo orden, y una discretización en tiempo centrada en $t^{n+1/2}$ con paso de tiempo $\Delta t/2$, también de segundo orden. ¿Cómo ha tratado las condiciones de contorno? ¿Cuál es la condición de estabilidad de este método? Implemente dicho método en Matlab.

Cuestión 3.2. Presente gráficas de la solución para $t \in (0, 25)$ utilizando una malla espacial con $1/\Delta x = 10, 25, 50, 100, 200$. ¿Qué Δt máximo puede utilizar que garantice la estabilidad en cada uno de dichos casos? Utilice como Δt la mitad de dicho valor.

Cuestión 3.3. Elija un Δx y un Δt adecuados para obtener una solución en $t \in (0, 250)$. Comente numéricamente, matemáticamente y físicamente los resultados que ha obtenido.

Cuestión 4.1. Desarrolle un método numérico basado en el método de las características. Recuerde que para S diagonal ($S = \mathrm{diag}(s_1, s_2)$) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial t} + s_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2,\\ \frac{\partial y_2}{\partial t} + s_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2,\end{aligned}$$

que a lo largo de las curvas características

$$\frac{dx}{dt} = s_1, \qquad \frac{dx}{dt} = s_2,$$

se transforma en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2,\\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2,\end{aligned}$$

que se pueden resolver mediante un método en diferencias finitas en tiempo. Utilice el método (explícito) de Euler hacia adelante. ¿Cómo trata las condiciones de contorno? ¿Cuál es la condición de estabilidad de este método?

Cuestión 4.2. Presente gráficas de la solución para $t \in (0, 25)$ utilizando una malla espacial con $1/\Delta x = 10, 25, 50, 100, 200$. ¿Qué Δt máximo puede utilizar que garantice la estabilidad en cada uno de dichos casos? Utilice como Δt la mitad de dicho valor.

Cuestión 4.3. Elija un Δx y un Δt adecuados para obtener una solución en $t \in (0, 250)$. Comente numéricamente, matemáticamente y físicamente los resultados que ha obtenido.

Cuestión 5.1 Compare los tres métodos que ha implementado y estudiado. ¿cuál es el más eficiente (en tiempo de cómputo) a la hora de obtener la solución para $t \in (0, 250)$?. ¿Cuál de los tres métodos es más preciso para los mismos Δx y Δt? ¿Cuál es el método que para un Δx dado permite un Δt más grande? Razone todas sus respuestas.

Cuestión 5.2 ¿Cuál es el método que considera más adecuado globalmente? Razone todas sus respuestas.

Cuestión 5.3 ¿Qué conclusiones obtiene de esta práctica respecto a los sistemas de distribución de gas natural?

Esta práctica está basada en el artículo: M. Ziólko, "Stability of method of characteristics," *Applied Numerical Mathematics*, 31 (1999) 463–486.