SEGUNDO PARCIAL

Primera práctica voluntaria — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 15 de Marzo de 1999

M.E.F. para ECUACIONES ELÍPTICAS

Las soluciones de la ecuación de Laplace juegan un papel importante en hidrodinámica y aerodinámica. Consideraremos solamente el problema bidimensional estacionario (no dependiente del tiempo), es decir, se supone que el movimiento del fluido es el mismo en todos los planos paralelos al plano xy, siendo la velocidad paralela a dicho plano e independiente del tiempo.

Considere un fluido incompresible (con densidad uniforme ρ), no viscoso e irrotacional (potencial) en estado estacionario. En este caso, la presión del fluido $p(x, y)$ satisface la ecuación de Bernuoilli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) = \text{constante},$$

donde $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es la velocidad del fluido, con lo que la presión es mayor donde la velocidad es menor, y máxima donde ésta es nula.

Dado que para un fluido irrotacional la vorticidad es nula ($\nabla \times V = 0$) existe una función potencial de velocidad ϕ tal que

$$V = (u, v) = \nabla\phi = \operatorname{grad}\phi = (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}).$$

Además como el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad $\nabla \cdot V = 0$ se convierte en

$$\Delta\phi = 0,$$

es decir, en la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad. Esta ecuación debe suplementarse con condiciones de contorno en las superficies de los cuerpos sólidos que el fluido encuentre. En dichas superficies la componente normal de la velocidad $V \cdot \hat{n}$ debe ser cero, es decir,

$$V \cdot \hat{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma_s.$$

En esta práctica vamos a determinar el campo de velocidades bidimensional de un fluido incompresible que circula alrededor de un cuerpo sólido.

Normalmente se considera un cilindro de longitud infinita (cuya solución exacta es conocida), sin embargo, en esta práctica, y para simplificar el mallado, consideraremos un prisma de sección cuadrada infinito.

Para concretar, consideremos un prisma infinito (Γ_s) centrado en el origen de sección cuadrada de lado 2. El fluido exterior al prisma tiene una velocidad constante en el infinito, para simplificar $V_\infty = (1, 0)$. Para resolver numéricamente nuestro problema tenemos que acotar el fluido exterior y supondremos que el fluido tiene velocidad V_∞ en la superficie de un prisma infinito (Γ_∞) de lado 20 centrado en el origen. De esta forma el dominio de integración numérica y sus contornos son

$$\Omega = \{(x, y) : 1 < \text{máx}\{|x|, |y|\} < 10\},$$

$$\Gamma_s = \{(x, y) : \text{máx}\{|x|, |y|\} = 1\},$$
$$\Gamma_\infty = \{(x, y) : \text{máx}\{|x|, |y|\} = 10\}.$$

El problema a resolver es la resolución de la siguiente ecuación de Laplace (elíptica)

$$\begin{aligned} \Delta\phi = 0, &\qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, &\qquad x \in \Gamma_s, \\ V = (u, v) = (1, 0), &\qquad x \in \Gamma_\infty. \end{aligned}$$

1. Dibuje la geometría del problema. Dibuje aproximadamente el campo de velocidad alrededor del prisma que espera obtener. Dibuje aproximadamente el campo de potencial de velocidad que espera obtener. Utilice sus conocimientos de Ampliación de Matemáticas y de Mecánica de Fluidos.

2. Escriba la condición de contorno en Γ_∞ en función del potencial de velocidad.

3. Desarrolle una triangulación uniforme del dominio Ω. Introduzca una numeración de los nodos.

4. Desarrolle un método de elementos finitos cG(1) con polinomios lineales a trozos continuos (similar al visto en teoría para la ecuación de Poisson) para la ecuación de Laplace y condiciones de contorno consideradas en este problema. Detalle el cálculo de la matriz de coeficientes del sistema lineal resultante.

5. Implemente el método de elementos finitos desarrollado en el apartado anterior en Matlab. Para resolver el sistema lineal de ecuaciones, declare las matrices de tipo *sparse* y utilice los algoritmos de resolución estándares de Matlab.

6. Estudie cómo varía la solución que obtiene con Matlab en función del paso de la malla (diámetro de los triángulos). ¿Cómo determinaría una solución numérica con un error menor de 0.01? ¿Qué haría para tener suficiente confianza en la validez de una solución numérica dada?

7. Dibuje gráficamente la solución que ha obtenido para el potencial de velocidad.

8. ¿Cómo determinaría numéricamente el campo de velocidad a partir del potencial de velocidad? Desarrolle un algoritmo que lo determine.

9. Dibuje gráficamente el campo de velocidad que ha obtenido utilizando la función de Matlab *quiver*.