Tercera práctica voluntaria — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 24 de Enero de 2000

Métodos de Elementos Finitos para Ecuaciones Elípticas y de Onda.

Considere la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet definida en un cuadrado unidad en $\mathbb{R}^2$,

$$-\Delta u = 0, \qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$

$$u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad u(x,1) = g(x), \quad u(1,y) = g(y), \quad x,y \in (0,1),$$

$$g(x) = \frac{\tanh(10x-5)+1}{2},$$

1. Desarrolla un método de elementos finitos basados en polinomios a trozos lineales para la ecuación de Laplace previamente indicada. Para ello,

   a) escribe una triangulación del cuadrado unidad y define los espacios de búsqueda y prueba adecuados para este problema,

   b) escribe la formulación de Galerkin continua, la formulación variacional continua, la formulación variacional discreta,

   c) detalla el cálculo de los elementos de la matriz de coeficientes,

   d) escribe un programa en Matlab que calcule dicha matriz de coeficientes (como una matriz *sparse*) y que la resuelva.

   e) Representa la solución que has obtenido para una triangulación cuyos triángulos tengan catetos de longitud 1/10, 1/50 y 1/100. Compara y comenta los resultados que has obtenido.

   f) ¿Puedes obtener la solución exacta de este problema? En su caso, compara su evaluación con la solución numérica que has obtenido. ¿Cómo son los errores?

2. Podemos resolver la ecuación de onda lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, \qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$

$$u(x,0,t) = u(0,y,t) = 0, \quad u(x,1,t) = g(x), \quad u(1,y,t) = g(y), \quad x,y \in (0,1), \quad t > 0,$$

$$g(x) = \frac{\tanh(10x^{10} - 5) + 1}{2},$$

$$u(x, y, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \qquad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

mediante un método de líneas basado en elementos finitos, es decir, escribiendo la ecuación de onda como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \Delta u, \qquad \frac{du}{dt} = v.$$

a) Escribe en detalle la matriz del sistema de ecuaciones diferenciales.

b) Utiliza el método numérico `ode45` de Matlab para resolver dicho sistema de ecuaciones para las tres mallas que has estudiado en apartados anteriores.

c) Comenta cómo son las soluciones que obtienes. En principio, la condición inicial de Dirichlet generará ondas en el contorno que se propagarán hacia el interior. ¿Es este el comportamiento que observas?