

ECUACIONES ELÍPTICAS.

Considera el siguiente problema en ecuaciones en derivadas parciales

$$\Delta u(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

$$u(x, 0) = 2x, \quad x \in [0, 1]$$

$$u(x, 1) = \frac{x^2}{2} + 1 + 3x, \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, y) = y, \quad y \in [0, 1]$$

$$u(1, y) = \frac{y^2}{2} + 2 + 2y, \quad y \in [0, 1]$$

1. Comprueba que su solución es

$$u(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + xy + 2x + y$$

2. Propón un método de diferencias finitas que utilice el mismo número $(N + 1)$ de puntos equiespaciados en las direcciones x e y .
3. Resuelve el sistema de ecuaciones que obtienes para distintos valores de N y comenta los resultados utilizando los siguientes métodos
 - (a) inversión directa de la matriz en MATLAB,
 - (b) método de Gauss-Jacobi,
 - (c) método de Gauss-Seidel.
4. Escribe la formulación variacional continua del problema anterior.
5. Propón un método de elementos finitos basados en funciones lineales a trozos sobre una triangularización estándar del dominio considerado.
6. Resuelve el sistema que obtienes con los mismos métodos que en el apartado 3.
7. Muestra algunas gráficas ilustrativas sobre los errores cometidos con los métodos numéricos utilizados y comenta los resultados.

NOTA: puedes usar la función DBLQUAD de MATLAB para calcular las integrales dobles que necesites para el método de elementos finitos.