Primera relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 5 de Octubre de 2000

EJERCICIOS: REPASO DE CÁLCULO, NO ENTRAN A EXAMEN.

1. **Sucesiones de Cauchy**. Demuestra que una sucesión de números reales convergente es una sucesión de Cauchy.

2. **Convergencia uniforme**. Sea f_i una sucesión de Cauchy uniforme de funciones uniformemente continuas en un intervalo cerrado y acotado I. Prueba que el límite es uniformemente continuo.

3. **Teorema del valor medio**. Enuncia y demuestra el teorema del valor medio. Ayuda: comienza demostrando el teorema de Rolle (cuando la función en los extremos es nula).

4. **Regla de la cadena**. Demuestra la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} u(v(x)) = u'(v(x))\, v'(x),$$

asumiendo que u' es continua en $v(x)$ y v es diferenciable en x. Ayuda: usa el teorema del valor medio.

5. **Teorema del punto fijo**. Sea $u(x)$ una función diferenciable definida en los reales. Considera la sucesión $\{\xi_j\}$ generada por $\xi_j = u(\xi_{j-1})$, donde ξ_0 es un dato. Supone que hay una constante $0 < \theta < 1$ tal que $|u'(x)| \leq \theta$ para $x \in \mathbb{R}$. Prueba que $\{\xi_j\}$ es una sucesión de Cauchy que converge a $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi = u(\xi)$, donde llamaremos a ξ un punto fijo de u. Aplica este teorema a la función $u(x) = x/2 + 1/x$.

6. **Cero de una función**. Sea $u(x)$ una función continua definida en $\mathbb{R}$. Considera la sucesión $\{\xi_j\}$ generada por $\xi_j = \xi_{j-1} - \alpha\, u(\xi_{j-1})$, donde ξ_0 es un dato y α es una constante. Determina condiciones que garanticen que $\{\xi_j\}$ converge a $\xi \in \mathbb{R}$ que satisface $u(\xi) = 0$.

7. **Integración por partes**. Demuestra que si u y v son dos funciones diferenciables para $a \leq x \leq b$ y x_0 y x_1 son puntos en $[a, b]$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x)\, v(x)\, dx = u(x_1)\, v(x_1) - u(x_0)\, v(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v'(x)\, dx.$$

Ayuda: aplica el Teorema Fundamental del Cálculo al producto $u\, v$.

8. **Acotación de integrales**. Demuestra que si f_1 y f_2 son funciones y $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $a \leq x \leq b$ y x_0 y x_1 son puntos en $[a, b]$ con $x_0 < x_1$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx \leq \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\, dx.$$

Utiliza este teorema para probar que $|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx| \leq \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|\, dx$ si $x_0 < x_1$.

9. **Teorema de Taylor**. Enuncia y demuestra el teorema (del resto) de Taylor. Ayuda: integra sucesivamente por partes usando la notación $k_n(x) = (x - z)^n / n!$ como sigue

$$\begin{aligned} u(z) &= u(y) + \int_y^z Du(x)\, Dk_1(x)\, dx \\ &= u(y) + Du(y)\,(z - y) - \int_y^z D^2u(x)\, Dk_2(x)\, dx, \end{aligned}$$

donde en la última integral se ha usado $Dk_2 = k_1$. Continuando de esta manera, se demuestra el teorema usando un corolario del teorema del valor medio.

10. **Clasificación de Ecuaciones en Derivadas Parciales**. Demuestra que la ecuación en derivadas parciales (EDP) lineal con coeficientes constantes

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + D = 0,$$

se puede clasificar en elíptica, hiperbólica y parabólica, en función de la clasificación de la forma (diferencial) cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0, \qquad (Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = 0).$$

Ayuda: Realice una transformación de coordenadas general $(x, y) \to (\xi, \eta)$, que cerca de un punto estacionario se comporta como una forma cuadrática y demuestre que los invariantes de la EDP respecto a dicha transformación son los mismos que los de la forma cuadrática.