Segunda relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 7 de Octubre de 2000

Ejercicios de repaso de álgebra y cálculo vectorial.

1. **Propiedades de la distancia**. Usando los axiomas de la definición de distancia en un espacio topológico X, demuestre las siguientes propiedades

   a) $d(x,y) \geq 0, \qquad \forall x,y \in X,$

   b) $d(x,y) = d(y,x), \qquad \forall x,y \in X.$

2. **Distancia p general**. Demuestre que la función

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p},$$

   es una distancia. Ayuda: Utilice los siguientes lemas (sin demostración).
   (1) **Lema previo de Hölder**. Dados $\alpha, \beta \geq 0$, $p > 1$, q conjugado de p (tal que $1/p + 1/q = 1$). Entonces

$$\alpha^{1/p} \beta^{1/q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q},$$

   verificándose la igualdad sólo si $\alpha = \beta$.
   (2) **Desigualdad de Hölder discreta**. Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q},$$

   con $p > 1$ y q conjugado de p.

3. Demuestra que las normas l_1 y l_∞ de un vector $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top$ definidas como

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_d|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|,$$

   respectivamente, son realmente normas.

4. Representa el círculo (bola) unidad $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ para las tres normas $\|\cdot\|$, con $p = 1, 2, \infty$.

5. **Normas p generales y continuas**. Sea el espacio $L_p(a,b)$ de funciones reales $f(x)$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

demuestre que $\|f\|_p$ cumple los axiomas de norma.

6. **Normas p generales y discretas**. Sea el espacio l_p de sucesiones reales $x \equiv \{x_i\}$ tales que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

demuestre que $\|x\|_p$ cumple los axiomas de norma.

7. **Norma infinito**. Determina el límite

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

8. Demuestra que si $a_1, \ldots, a_d$, son números (pesos) positivos, entonces $(x,y) = \sum_{i=1}^d a_i \, x_i \, y_i$ es un producto escalar (interior) en $\mathbb{R}^d$. Escribe la norma asociada a este producto escalar y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Demuestra que la norma asociada a un producto escalar cumple la desigualdad triangular ($\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$).

9. **Desigualdad de Schwarz**. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto escalar (complejo). Enuncia y demuestra la desigualdad de Schwarz.

10. **Ley del paralelogramo**. Demuestra que para normas derivadas de un producto escalar

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

11. **Ortogonalidad e independencia**. Demuestra que un conjunto de vectores ortogonales entre sí son linealmente independientes.

12. Utiliza el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal que genere el mismo subespacio vectorial que los vectores (1,2,3,0), (1,1,-1,1) y (0,1,3,-2) de $\mathbb{R}^4$

13. Demuestra que $sin(n\,x)$ y $sin(m\,x)$ son ortogonales en $(0, \pi)$ si $n, m = 1, 2, 3, \ldots, n \neq m$.

14. Escribe la serie de Fourier de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & x &\in [0,1], \\ g(x) &= x(1-x), & x &\in [0,1]. \end{aligned}$$

Compara utilizando MATLAB las gráficas de estas funciones con las sumas de los 10 primeros términos de su serie de Fourier.

15. Calcula las siguientes transformadas de Fourier ($\mathbb{F}$) y de Laplace ($\mathcal{L}$) (directas e inversas):

a) La transformada de Fourier de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & 1 < x < 4, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 3, \\ -4, & 6 < x < 8, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

b) Si $F(k) = \mathbb{F}\{f(x)\}$, calcula la transformada inversa

$$\mathbb{F}^{-1}\left\{\frac{F(k)}{k^2 + 8k + 20}\right\}$$

c) Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$f(t) = t^2 \sin at, \qquad g(t) = e^{bt} \cos at, \qquad h(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 0, & 2 < t, \end{cases}$$

d) La transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh a\sqrt{s}}{s \cosh b\sqrt{s}}\right\}, \qquad b > a > 0,$$

16. **Identidades de cálculo vectorial**. Contesta a las siguientes cuestiones en dos dimensiones (y luego en tres dimensiones)

    a) ¿u es una función escalar o vectorial en la expresión $\operatorname{div}\operatorname{rot} u = \nabla \cdot \nabla \times u = 0$?, y demuestra dicha identidad;

    b) ¿u es una función escalar o vectorial en la expresión $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0$?, y, demuéstrala.

17. **Coordenadas cilíndricas**. A partir de la expresión general de los operadores vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, escribe su expresión en coordenadas cilíndricas.

18. **Coordenadas esféricas**. A partir de la expresión general de los operadores vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, escribe su expresión en coordenadas esféricas.

19. Escribe el desarrollo de Taylor de la función u(x,y)=cos(x+y) hasta los términos de segundo orden y la expresión del error de Taylor.

20. Demuestra que la definición de rotacional para $u : R^3 \to R^3$ en los casos $u = (u_1, u_2, 0)$ y $u = (0, 0, u_3)$ en los que $u_1,\ u_2,\ u_3$ no dependen de x_3 se reduce a las definiciones de rotacional para $u : R^2 \to R^2$ y $u : R^2 \to R$ respectivamente.

21. Demuestra que la derivada direccional de una función $u : R^3 \to R$ en un punto P se maximiza en el vector unitario en la dirección del gradiente

$$e = \frac{\operatorname{grad} u(P)}{\|\operatorname{grad} u(P)\|}.$$

22. Calcula el gradiente y el laplaciano de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(x),$$
$$g(x, y, z) = e^{x+z} \tan(y^2)$$

23. Calcula el jacobiano, el rotacional y la divergencia de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \sin(xy) \end{pmatrix}, \qquad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2 \sin(xy) \\ z + 3 \end{pmatrix}.$$