

Métodos de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parabólicas.

1. Demuestra que se verifica

$$\sum_{m=1}^{M-1} V_m(Z_{m-1} - Z_m) = \sum_{m=1}^{M-1} Z_m(V_{m+1} - V_m)$$

si $Z_0 = V_M = 0$

$$\sum_{m=1}^{M-1} V_m(Z_{m+1} - Z_m) = \sum_{m=1}^{M-1} Z_{m+1}(V_m - V_{m+1}) - V_1 Z_1$$

si $Z_M = 0$

2. Demuestra que existe una matriz D diagonal tal que DAD^{-1} es una matriz simétrica, siendo A la matriz de tamaño $m \times m$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Demuestra que si A es una matriz real tridiagonal verificando $a_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} a_{ij}$ entonces todos sus autovalores son positivos.
4. Estudia las propiedades de consistencia y estabilidad del método de Dufort-Frankel para la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

con condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas. Recuerda que dicho método utiliza el siguiente esquema en diferencias finitas:

$$\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{\Delta x^2} - \frac{u_{m,n+1} + u_{m,n-1}}{\Delta x^2}$$

¿Cómo arrancarías este método?

5. Escribe un método en diferencias finitas para el siguiente problema de valores iniciales o de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, \quad x \in (0, 1), t \in (0, T]$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

donde a es una constante, y con condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$$

utilizando un θ -método. Estudia la consistencia y estabilidad del método que propongas.

6. Considera la ecuación parabólica ($\alpha(x) \neq 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]$$

$$u(0, t) = -u(1, t) = g(t), \quad t \in (0, T],$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1).$$

Deduce dos fórmulas en diferencias finitas de orden de consistencia $O(\Delta x^2)$ y $O(\Delta x^4)$ utilizando la fórmula en diferencias finitas exacta

$$u_{m, n+1} = \exp\left(\alpha(x)\Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_{m, n}$$

¿Cómo tratarías las condiciones iniciales y de contorno de Dirichlet al mismo orden de consistencia? Estudia la estabilidad de los métodos que propongas mediante el método de Von Neuman y el método de la matriz suponiendo $\alpha(x)$ constante.

7. Para la ecuación parabólica autoadjunta

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 4, \quad t \in (0, T]$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1)$$

se puede usar la ecuación en diferencias finitas

$$\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} \delta_x (\alpha_m \delta_x) u_{m,n}$$

Desarrolla los operadores en diferencias finitas y detalla la expresión resultante. ¿Es un método explícito? Determina los términos del error de truncado. ¿Cómo tratarías las condiciones de contorno e iniciales con el mismo orden de consistencia? Estudia la estabilidad del método suponiendo α constante

8. Siguiendo la idea del ejercicio anterior propón un método del tipo de Crank-Nicolson para resolver el mismo problema. Estudia el error de truncado y especifica cómo tratarías las condiciones de contorno. Estudia la estabilidad del método suponiendo α constante
9. Escribe el método de Crank-Nicolson para la ecuación de difusión bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) + u(x, y, t), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad t \in (0, T],$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

Estudia sus propiedades de convergencia y estabilidad.

10. Propón algún método (o métodos) tipo ADI o LOD para el problema del ejercicio anterior que conservando las propiedades del método analizado en dicho ejercicio reduzca el coste computacional para obtener la solución numérica.