Francisco R. Villatoro y Carmen M. García 15 de Enero de 2001

Ecuaciones diferenciales elípticas e hiperbólicas.

1. Considera el siguiente problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$
$$u(0, y) = u(1, y) = 1, \qquad y \in (0, 1),$$
$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \qquad x \in (0, 1).$$

   Escribe el método de diferencias finitas que resulta al discretizar las derivadas parciales utilizando una fórmula en diferencias centrada de orden 2 utilizando una malla uniforme con $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$ donde N es un entero mayor que 2. Expresa este método de forma matricial. Utiliza MATLAB para resolver el sistema que obtienes con N=10.

2. Considera el siguiente problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0, \qquad y \in (0, 1),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \qquad x \in (0, 1).$$

   Escribe el método de diferencias finitas que resulta al discretizar las derivadas parciales utilizando una fórmula en diferencias centrada de orden 2 utilizando una malla uniforme con $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$ donde N es un entero mayor que 2. ¿Cómo tratas las condiciones de contorno? Expresa el método de forma matricial. Utiliza MATLAB para resolver el sistema que obtienes para N=10.

3. Consideramos el siguiente problema: hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ verificando

$$-\triangle u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \subset R^2,$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega.$$

Su formulación variacional es: hallar $u \in V$ tal que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in V$$

donde

$$\langle w, v \rangle = \int_\Omega w \cdot v dx,$$

y

$$V = \left\{ v : \int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 dx < \infty, \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \right\}.$$

Demuestra que si u es solución del problema en la formulación clásica entonces también es solución del problema en formulación variacional. Además si u es una solución del problema en formulación variacional y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ entonces u es solución del problema en su formulación clásica.

4. Resuelve el siguiente problema utilizando el método de elementos finitos sobre una triangularización uniforme del cuadrado $(0,1) \times (0,1)$ utilizando elementos lineales a trozos continuos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 1, \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1),$$

$$u(0,y) = y, \quad u(1,y) = 1 + y \qquad y \in [0,1],$$
$$u(x,0) = x, \quad u(x,1) = 1 + x, \qquad x \in [0,1].$$

Plantea el sistema de ecuaciones para $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$ y resuelve utilizando Matlab para $N = 10$.

5. Utiliza el método de las características para resolver el siguiente problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1), t > 0,$$

$$u(x,0) = sin(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad x \in (0,1),$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0.$$

6. Demuestra que el método explícito de Lax-Wendroff

$$U_{i\,j+1} = \frac{1}{2} a\, r\, (1 + ar)\, U_{i-1\,j} + (1 - a^2\, r^2)\, U_{i\,j} + \frac{1}{2} a\, r\, (-1 + ar)\, U_{i+1\,j},$$

para la ecuación del transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (a > 0),$$

es estable si $0 < a\,r \leq 1$, donde $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, y determina su error de truncado.

7. Considera la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(y).$$

a) Aplica el método explícito de Lax-Wendroff a dicho problema. Ayuda: divide el problema en dos problemas de onda de primer orden acoplados y aplica Lax-Wendroff por separado.

b) Calcula los términos del error de truncado aplicados a cada una de las ecuaciones de primer orden por separado. ¿Cuál es el orden de consistencia de este método?

c) Estudia la estabilidad del método para las dos ecuaciones de primer orden.

d) Calcula los términos del error de truncado aplicados a la ecuación de onda (de segundo orden) original. ¿Cuál es el orden de consistencia de este método?

e) Estudia la estabilidad del método para la ecuación de segundo orden.