Francisco R. Villatoro y Carmen M. García 18 de febrero de 2002

Programación Lineal.

1. Resuelva los siguientes problemas de programación lineal gráfica y analíticamente mediante el método del SIMPLEX:

   (a) Maximizar $x_1 + x_2$, S.A.

   $$2x_1 + x_2 \leq 3,$$
   $$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$
   $$x_1, x_2 \geq 0.$$

   (b) Maximizar $x_1 + 6x_2$, S.A.

   $$-2x_1 + x_2 \leq 4,$$
   $$-x_1 + x_2 \leq 1,$$
   $$2x_1 + x_2 \leq 6,$$
   $$x_1, x_2 \geq 0.$$

   (c) Minimizar $-11x_1 - 4x_2$, S.A.

   $$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$
   $$5x_1 + 2x_2 \geq 10,$$
   $$x_1, x_2 \geq 0.$$

   (d) Minimizar $x_1 - x_2$, S.A.

   $$x_1 + x_2 \leq 3,$$
   $$2x_1 - x_2 \geq 1,$$
   $$x_2 \leq 2,$$
   $$x_1, x_2 \geq 0.$$

(e) Maximizar $x_1 + x_2$, S.A.

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \text{ n.r.s. (No restringida en signo)}$$

2. Determina los problemas duales de los siguientes problemas de programación lineal:

   (a) Max. $z = 2x_1 + x_2$, S.A.

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

   (b) Min. $z = 2x_1 + x_2$, S.A.

$$-x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 - 2x_2 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ n.r.s.}$$

3. Realiza un análisis de sensibilidad para los cambios en los costos de los siguientes problemas

   (a) Minimizar $z = -11x_1 - 4x_2$, S.A.

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(b) Maximizar $z = x_1 + x_2$, S.A.

$$-x_1 + x_2 \leq 0,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(c) Minimizar $z = -2x_1 - x_2 - x_3$, S.A.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3,$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

4. Realiza un análisis de sensibilidad para los cambios en los recursos de los siguientes problemas

(a) Minimizar $z = -11x_1 - 4x_2$, S.A.

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(b) Maximizar $z = x_1 - x_2$, S.A.

$$-x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(c) Minimizar $z = -2x_1 - x_2 - x_3$, S.A.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

5. Una empresa fabrica escritorios, mesas y sillas. La fabricación de cada producto requiere madera y dos tipos de trabajo especializado: acabado y carpintería. Las cantidades de cada recurso que necesita cada tipo de mueble son:

RECURSO	Escritorio	Mesa	Silla	DISPONIBLE
Madera (m^2)	8	6	1	48
Horas de acabado	4	2	1.5	20
Horas de carpint.	2	1.5	0.5	8
BENEFICIO (euros)	60	30	20	

En un estudio de mercado se ha estimado que como mucho van a venderse 5 mesas. Se pide

(a) Maximizar los ingresos empleando los recursos disponibles.

(b) Calcular e interpretar los precios duales de este problema.

(c) ¿Cuál sería el beneficio en los siguientes supuestos?

   i. Si se dispusiera de 18 horas de acabado.

   ii. Si se dispusiera de 9 horas de carpintería.

   iii. Si se dispusiera de 30 m^2 de madera.

   iv. Si se dispusiera de 30 horas de carpintería.

Plantee un problema de programación lineal que resuelva los siguientes enunciados.

1. En un empresa los trabajadores trabajan 5 días consecutivos y descansan los 2 siguientes. En función del día el número de trabajadores requeridos viene dado por la tabla siguiente.

DIA	Lun.	Mar.	Mie.	Jue.	Vie	Sab.	Dom.
$NUM.$	17	13	15	19	14	16	11

¿Cuál es el número mínimo de trabajadores que requiere la empresa? ¿Cuál es el número óptimo de trabajadores?

2. Una empresa fabrica barcos de vela y satisface la demanda que recibe trimestralmente. Al comienzo del primer trimestre la empresa dispone de 10 barcos y puede producir actualmente 40 barcos por trimestre, con un coste de 400 Kptas/barco. Si en un trimestre hay que producir barcos mediante el contrato de horas extras, ello supone un coste adicional de producción de 50 Kptas/barco. Si en un trimestre no se venden todos los barcos producidos, han de ser almacenados con un coste de 20 Kptas/barco. Determine un plan de producción que minimice la suma de los costes de producción e inventario durante el próximo año, en el que la demanda esperada es de 40, 60, 75 y 25 barcos por trimestre, respectivamente.

3. Consideremos el problema de la optimización de una estructura. Considere una estructura con m barras de longitud l_i [m] y sección transversal x_i [m^2]. Las barras están unidas formando una estructura con N nodos (uniones), de los que $n < N$ son libres y $N - n$ están fijos (anclados). La estructura está sujeta a fuerzas externas f_j [N] que se aplican sólo en los nodos libres $j = 1, \ldots, n$.

   Sea u_i y s_i la fuerza y deformación, respectivamente, en la barra i-ésima. Asumamos que las barras son perfectamente plásticas:

$$\begin{cases} s_i = 0, & \text{si } -\alpha < u_i/x_i < \alpha, \\ u_i/x_i = \alpha, & \text{si } s_i > 0, \\ u_i/x_i = -\alpha, & \text{si } s_i < 0, \end{cases}$$

   donde α es una constante asociada al material.

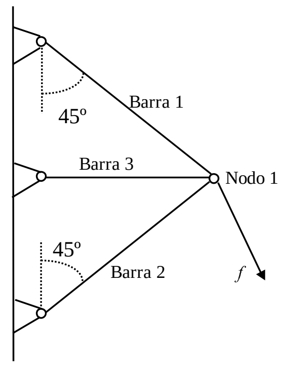
Escriba la ecuación del equilibrio de fuerzas (en los nodos libres; llame θ_{ij} al ángulo entre la barra que une los nodos i y j, y la horizontal.

El coste de la estructura es proporcional al volumen de material utilizado en la estructura. Escriba la función costo a minimizar.

Plantee el problema de programación lineal que ha de resolver para obtener, dada una topología fija, la estructura de coste mínimo que soporte en equilibrio un conjunto de cargas dadas.

Nota: en un problema real la topología no está fija y debe ser parte de la solución.

Aplique las ecuaciones anteriores a la estructura cuya topología se presenta en la siguiente figura.



4. Considere el diseño de un sistema de control óptimo en tiempo discreto (con periodo de muestreo normalizado a la unidad). Sean señales de entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, y coeficientes de respuesta a impulsos h_i, con $h_i = 0$ para $i > k$. La salida de este sistema estará dada por

$$y(t) = h_0\, u(t) + h_1\, u(t-1) + h_2\, u(t-2) + \cdots + h_k\, u(t-k).$$

Suponga una respuesta en tiempo finito N, es decir, $t \in T$, donde $T = \{0, \ldots N\}$. ¿Cómo se calcula la salida ($y(t)$, con $t \in T$) a partir de la entrada ($u(t)$, $t \in T$)?

El problema del seguimiento de trayectorias consiste en encontrar las entradas $u(t)$ ($t = 0, \ldots, M$, $M < N$) tales que minimicen la norma (infinito) de la desviación entre la salida $y(t)$ y una salida deseada $y_{\text{des}}(t)$, (con $t \in T$), es decir,

$$\min \|y(t) - y_{\text{des}}(t)\| = \min \max_{t \in T} |y(t) - y_{\text{des}}(t)|.$$

En la práctica, las entradas han de ser acotadas ($|u(t)| \leq U$), y la inercia del sistema de control impide variaciones bruscas de la señal de entrada ($|u(t+1) - u(t)| \leq S$).

Escriba un problema de programación lineal para resolver el problema del seguimiento óptimo de trayectorias. ¿Cuáles son las variables de decisión? ¿Cuál es la función objetivo?