Duodécima relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 2 de Mayo de 2001

Cadenas de Markov

1. En una ciudad hay tres agencias de venta de automóviles. Dada la compañía a la que compró un cliente la última vez, la probabilidad de que compre la próxima vez en cada una de las agencias es

	A1	A2	A3
A1	0.8	0.1	0.1
A2	0.05	0.85	0.1
A3	0.1	0.2	0.7

Si alguien posee actualmente un automóvil adquirido en la agencia A1, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos siguientes coches que compre sea de la agencia 1?

2. Se considera la cadena de Markov cuyos estados 1,2,3,4,5 tienen la matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Clasifica los estados, determina las clases de dicha cadena de Markov y si existe un estado estable determina las probabilidades de dicho estado.

3. En Málaga al 90 % de los días soleados siguen días soleados, y al 60 % de los días nublados siguen días nublados. Con esta información modela el clima de Málaga como cadena de Markov

4. Para cada una de las siguientes matrices determine si la cadena de Markov es ergódica, los estados recurrente, transitorio y absorbente.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Una compañía revisa anualmente el estado de uno de sus productos importantes y decide si tiene éxito (estado 1) o no (estado 2). La empresa debe decidir si anunciar o no el producto para promover más las ventas. Las matrices P_1 y P_2 proporcionan las probabilidades de transición con y sin publicidad durante cualquier año. Los rendimientos asociados están dados por las matrices R_1 y R_2. Encuentre las decisiones óptimas para los próximos 3 años.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Un bosque consta de dos tipos de árboles: los que tienen menos de 1.5m de alto y los que son más altos. Cada año muere el 40 % de los árboles que tiene menos de 1.5m, el 10 % se vende a 1000 ptas cada uno, el 30 % permanece con una altura inferior a 1.5m y el resto crecen por encima de dicha altura. El 50 % de los árboles de más de 1.5m de alto se venden a 2000 ptas, el 20 % se venden a 1500 ptas y el resto permanecen en el bosque.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que muera un árbol de 0 a 1.50m antes de venderse?

   b) Si se planta un árbol de menos de 1.5m, ¿cuál es el ingreso esperado que se va a obtener de ese árbol?

7. Al principio de cada año, una máquina puede estar en buen, regular o mal estado. Si un año la máquina está en buen estado al año siguiente seguirá estando en buen estado con probabilidad 0.85, regular con probabilidad 0.10 y mal con probabilidad 0.05. Una máquina regular estará regular al principio del año siguiente con probabilidad 0.7 y mal con probabilidad 0.3. Una máquina en nueva en buen estado cuesta 6000 euros El mantenimiento de una máquina buena cuesta 1000 euros al año y el de una regular 2500. Una máquina mala debe ser reemplazada inmediatamente por una nueva. ¿Es conveniente reemplazar la máquina en cuanto se vuelva regular o es mejor esperar hasta que se estropee? ¿Y si suponemos que sólo utilizaremos la máquina durante un período de 3 años?