

Ejercicios de repaso de álgebra y cálculo vectorial.

1. **Propiedades de la distancia.** Usando los axiomas de la definición de distancia en un espacio topológico X , demuestre las siguientes propiedades

a) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X,$
b) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X.$

2. **Distancia p general.** Demuestre que la función

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p},$$

es una distancia. Ayuda: Utilice los siguientes lemas (sin demostración).

- (1) **Lema previo de Hölder.** Dados $\alpha, \beta \geq 0, p > 1, q$ conjugado de p (tal que $1/p + 1/q = 1$). Entonces

$$\alpha^{1/p} \beta^{1/q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q},$$

verificándose la igualdad sólo si $\alpha = \beta$.

- (2) **Desigualdad de Hölder discreta.** Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q},$$

con $p > 1$ y q conjugado de p .

3. Demuestra que las normas l_1 y l_∞ de un vector $x = (x_1, \dots, x_d)^\top$ definidas como

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_d|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|,$$

respectivamente, son realmente normas.

4. Representa el círculo (bola) unidad $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ para las tres normas $\|\cdot\|$, con $p = 1, 2, \infty$.

5. **Normas p generales y continuas.** Sea el espacio $L_p(a, b)$ de funciones reales $f(x)$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

demuestre que $\|f\|_p$ cumple los axiomas de norma.

6. **Normas p generales y discretas.** Sea el espacio l_p de sucesiones reales $x \equiv \{x_i\}$ tales que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

demuestre que $\|x\|_p$ cumple los axiomas de norma.

7. **Norma infinito.** Determina el límite

$$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

8. Demuestra que si a_1, \dots, a_d , son números (pesos) positivos, entonces $(x, y) = \sum_{i=1}^d a_i x_i y_i$ es un producto escalar (interior) en \mathbb{R}^d . Escribe la norma asociada a este producto escalar y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demuestra que la norma asociada a un producto escalar cumple la desigualdad triangular ($\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$).

9. **Desigualdad de Schwarz.** Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con producto escalar (complejo). Enuncia y demuestra la desigualdad de Schwarz.
10. **Ley del paralelogramo.** Demuestra que para normas derivadas de un producto escalar

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

11. **Ortogonalidad e independencia.** Demuestra que un conjunto de vectores ortogonales entre sí son linealmente independientes.

12. Utiliza el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal que genere el mismo subespacio vectorial que los vectores $(1,2,3,0)$, $(1,1,-1,1)$ y $(0,1,3,-2)$ de \mathbb{R}^4
13. Demuestra que $\sin(nx)$ y $\sin(mx)$ son ortogonales en $(0, \pi)$ si $n, m = 1, 2, 3, \dots, n \neq m$.
14. Escribe la serie de Fourier de las siguientes funciones

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1],$$

$$g(x) = x(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Compara utilizando MATLAB las gráficas de estas funciones con las sumas de los 10 primeros términos de su serie de Fourier.

15. Calcula las siguientes transformadas de Fourier (\mathbb{F}) y de Laplace (\mathcal{L}) (directas e inversas):
- a) La transformada de Fourier de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & 1 < x < 4, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 3, \\ -4, & 6 < x < 8, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

- b) Si $F(k) = \mathbb{F}\{f(x)\}$, calcula la transformada inversa

$$\mathbb{F}^{-1} \left\{ \frac{F(k)}{k^2 + 8k + 20} \right\}$$

- c) Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$f(t) = t^2 \sin at, \quad g(t) = e^{bt} \cos at, \quad h(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 0, & 2 < t, \end{cases}$$

- d) La transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh a\sqrt{s}}{s \cosh b\sqrt{s}} \right\}, \quad b > a > 0,$$

16. **Identidades de cálculo vectorial.** Contesta a las siguientes cuestiones en dos dimensiones (y luego en tres dimensiones)
- a) ¿ u es una función escalar o vectorial en la expresión $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = \nabla \cdot \nabla \times u = 0?$, y demuestra dicha identidad;
- b) ¿ u es una función escalar o vectorial en la expresión $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0?$, y, demuéstrala.
17. **Coordenadas cilíndricas.** A partir de la expresión general de los operadores vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, escribe su expresión en coordenadas cilíndricas.
18. **Coordenadas esféricas.** A partir de la expresión general de los operadores vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, escribe su expresión en coordenadas esféricas.
19. Escribe el desarrollo de Taylor de la función $u(x,y)=\cos(x+y)$ hasta los términos de segundo orden y la expresión del error de Taylor.
20. Demuestra que la definición de rotacional para $u : R^3 \rightarrow R^3$ en los casos $u = (u_1, u_2, 0)$ y $u = (0, 0, u_3)$ en los que u_1, u_2, u_3 no dependen de x_3 se reduce a las definiciones de rotacional para $u : R^2 \rightarrow R^2$ y $u : R^2 \rightarrow R$ respectivamente.
21. Demuestra que la derivada direccional de una función $u : R^3 \rightarrow R$ en un punto P se maximiza en el vector unitario en la dirección del gradiente

$$e = \frac{\operatorname{grad} u(P)}{\|\operatorname{grad} u(P)\|}.$$

22. Calcula el gradiente y el laplaciano de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(x),$$

$$g(x, y, z) = e^{x+z} \tan(y^2)$$

23. Calcula el jacobiano, el rotacional y la divergencia de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \sin(xy) \end{pmatrix}, \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2 \sin(xy) \\ z + 3 \end{pmatrix}.$$