Francisco R. Villatoro y Carmen M. García 9 de Enero de 2002

Métodos de elementos finitos para ecuaciones diferenciales parabólicas.

1. Construye una base nodal de $\mathcal{P}^{(3)}(a,b)$ que permita expresar un polinomio de dicho espacio utilizando como coeficientes en dicha base su valor y el de su derivada en los puntos a y b (base nodal de Hermite). A partir de dicha base construye una base del espacio $V_H^{(3)}(a,b)$ del espacio de polinomios a trozos continuos y con derivada continua. ¿Cuál es su dimensión? Dibuja las funciones base asociadas a los nodos del contorno y una asociada a un nodo interior.

2. Demuestra que la proyección ortogonal de f en $\mathcal{P}^{(n)}(a,b)$ existe y es única, es decir, existe un único polinomio Pf en $\mathcal{P}^{(n)}(a,b)$ que verifica
$$\langle f - Pf, v\rangle = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{P}^{(n)}(a,b).$$

3. Resuelve el siguiente problema utilizando el método de elementos finitos con polinomios a trozos lineales continuos utilizando una partición equidistribuida con $N+1$ puntos: $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2\,h$, ..., $x_N = N\,h = 1$:
$$-u''(x) + a(x)\,u'(x) = x, \qquad x \in (0,1),$$
$$u(0) = 5, \qquad u'(1) = 10.$$
Detalla la formulación variacional continua, el espacio de búsqueda y el espacio de prueba. Detalla la formulación variacional discreta (sin y con bases), y los espacios de búsqueda y prueba discretos. Compara la solución obtenida con la solución exacta. Puedes utilizar MATLAB para representar gráficamente las soluciones.

4. Desarrolla un método de elementos finitos con polinomios a trozos lineales continuos para el siguiente problema de valores iniciales o de Cauchy
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

donde a es una constante, y con condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0.$$

Utiliza un θ-método para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales al que da lugar. Recuerda que tienes que detallar las formulaciones variacional continua y discreta, así como los espacios de búsqueda y prueba continuos y discretos.

5. Considera la ecuación parabólica ($\alpha(x) \neq 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$
$$u(0,t) = -u(1,t) = g(t), \quad t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1).$$

¿Cómo resolverías este problema utilizando un método de elementos finitos? ¿Qué bases utilizarías?

6. Describe un método de elementos finitos para resolver el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,T],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 4, \quad t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1),$$

7. Escribe un método de elementos finitos para la ecuación de difusión bi-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) + u(x,y,t), \qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \quad t \in (0,T],$$
$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$
$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 1, \quad u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0$$

Resuelve el problema utilizando un mallado con 8 triángulos del cuadrado $(0,1)\times(0,1)$ suponiendo como condición inicial

$$u_0(x,y) = (1 + x\,(1-x))\,y\,(1-y).$$