Ecuaciones hiperbólicas.

1. Determine (o demuestre) la fórmula de D'Alembert para la solución del problema

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = f, & \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

2. Describa en cómo aplicaría un método de elementos finitos que utilice una aproximación lineal a trozos en tiempo y en espacio, continuo en espacio y sólo continuo en tiempo cuando la malla no cambia entre pasos de tiempo al siguiente problema.

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = f, & \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x_1) = 0 = u(x_2), & x_1 < x_2, t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Para ello descomponga el problema en dos ecuaciones parabólicas acopladas. Suponga además, que la malla espacial puede variar de un paso temporal a otro.

3. Indica cómo aplicarías el método de las características para resolver el siguiente problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$u(x, 0) = sin(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \qquad x \in (0, 1),$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \qquad t > 0.$$

4. Demuestra que el método explícito de Lax-Wendroff

$$U_{i\,j+1} = \frac{1}{2} a\, r\, (1 + ar)\, U_{i-1\,j} + (1 - a^2\, r^2)\, U_{i\,j} + \frac{1}{2} a\, r\, (-1 + ar)\, U_{i+1\,j},$$

para la ecuación del transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (a > 0),$$

es estable si $0 < a\, r \leq 1$, donde $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, y determina su error de truncado.

5. Considera la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(y).$$

a) Aplica el método explícito de Lax-Wendroff a dicho problema. Ayuda: divide el problema en dos problemas de onda de primer orden acoplados y aplica Lax-Wendroff por separado.

b) Calcula los términos del error de truncado aplicados a cada una de las ecuaciones de primer orden por separado. ¿Cuál es el orden de consistencia de este método?

c) Estudia la estabilidad del método para las dos ecuaciones de primer orden.

d) Calcula los términos del error de truncado aplicados a la ecuación de onda (de segundo orden) original. ¿Cuál es el orden de consistencia de este método?

e) Estudia la estabilidad del método para la ecuación de segundo orden.

f) Determine la solución analítica del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

¿Se pueden producir discontinuidades en la solución si la condición inicial es infinitamente diferenciable? Para el caso $c(u) = u$ estudie la posibilidad de generación de ondas de choque.

g) Describa la aplicación del método de Lax-Wendroff al problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

h) Describa la aplicación del método implícito de Wendroff al problema anterior.

i) Describa la aplicación del método de las características al problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$