Cuarta relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 2 de Noviembre de 1998

Introducción al método de Galerkin, método de elementos finitos y métodos espectrales.

1. Determine la solución aproximada $U(t)$ del problema lineal

$$\dot{u}(t) = \lambda\, u(t), \quad 0 < t \leq 1, \qquad u(0) = u_0, \tag{1}$$

mediante el método de Galerkin utilizando como espacio de búsqueda (*trial*) $\mathcal{P}^3(0,1)$ y como espacio de prueba (*test*) $\mathcal{P}_0^3(0,1)$,

$$\mathcal{P}_0^3(0,1) = \{v \in \mathcal{P}^3(0,1) : v(0) = 0\},$$

cuando $u_0 = \lambda = 1$.

2. Calcule la proyección $L_2(0,1)$ en el espacio $\mathcal{P}^3(0,1)$ de la solución exacta $u(t)$ del problema (1) y compárela con la aproximación $U(t)$ obtenida en dicho problema.

3. Determine la solución aproximada del problema (1) utilizando como espacio de búsqueda $V^{(q)} = \mathcal{P}^q(0,1)$ y como espacio de prueba $V^{(q-1)} = \mathcal{P}^{q-1}(0,1)$.

4. Determine la solución numérica aproximada del problema

$$-u'' = x, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

mediante el método de elementos finitos en el espacio $V_h^{(1)}$ de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla $h = 1/4$. Calcule la solución exacta de dicho problema y compare los dos resultados que ha obtenido.

5. Resuelva el problema

$$-((1+x)\, u'(x))' = 1 + (1 + 3\,x - x^2)\, exp(-x), \qquad 0 < x < 1$$

con $u(0) = u(1) = 0$, mediante el método de Galerkin espectral con polinomios trigonométricos en seno

$$U(x) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \, \sin(j\,\pi\,x).$$

para $q = 3$. Para calcular las integrales que le surjan, utilice un libro de tablas matemáticas (o un programa de álgebra simbólica como Mathematica, Maple, Derive, …).

6. Formule la solución del problema

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

mediante polinomios trigonométricos. Note que en este caso el sistema de ecuaciones resultante es trivial de resolver porque es diagonal. Interprete las fórmulas que obtenga en términos de series de Fourier.

7. Use el método de Galerkin espectral para discretizar el problema

$$-(a(x)\, u')' + b(x)\, u' = f(x), \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

8. Desarrolle un programa para resolver numéricamente el problema del ejercicio anterior utilizando polinomios trigonométricos de grado q (que será uno de los datos del problema), para

$$a(x) = 2\,x - x^2, \qquad b(x) = x, \qquad f(x) = (x^2 - 2)\, exp(-x).$$

Presente una gráfica de los resultados que ha obtenido.

9.