Octava relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 11 de Enero de 1999

Cálculo e Interpolación de Varias Variables.

1. Demuestre las siguientes igualdades vectoriales

   a) $\operatorname{div}\operatorname{rot} u = \nabla \cdot \nabla \times u = 0$, en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

   b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla\, u = 0$, en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

   c) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \nabla \times \nabla \times u = -\Delta u$, si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   d) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \nabla \times \nabla \times u = -\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u)$, si $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   Ayuda: utilice coordenadas cartesianas.

2. Aplicando la regla de la cadena para la diferenciación demuestre que

   a) si $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $s : \mathbb{R} \ni (a,b) \to \mathbb{R}^m$, siendo $\nabla\, u$ continua y $s(t)$ diferenciable, entonces

   $$v(t) = u(s(t)),$$

   tiene como derivada

   $$v'(t) = \frac{d}{dt} u(s(t)) = \nabla\, u(s(t)) \cdot s'(t);$$

   b) si $s(t) = x + t\,\hat{n}$, donde $x, \hat{n} \in \mathbb{R}^n$, entonces la derivada direccional de u en la dirección $\hat{n}$ es

   $$v'(0) = \partial_{\hat{n}} u(x) = \nabla\, u(x) \cdot \hat{n}.$$

3. Sea $x(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ la trayectoria de una partícula y $u(x,t)$ su campo de velocidades,

   $$\dot{x}(t) = u(x(t), t), \qquad x(0) = x_0.$$

   Sea la función trayectoria $x_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

   $$x_t : x_0 \mapsto x_t(x_0) = x(t),$$

y sea $A(t)$ el determinante Jacobiano de dicha función. Aplicando la regla de la cadena, demuestre que

$$\frac{dA}{dt} = \nabla \cdot u\, A,$$

y en el caso incompresible $\nabla \cdot u = 0$, demuestre que $A(t) = 1$, $\forall t > 0$. Ayuda: se trata del teorema de Liouville.

4. A partir del teorema fundamental del cálculo en $\mathbb{R}^2$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx = \int_\Gamma u\, n_2\, ds,$$

donde $\hat{n} = (n_1, n_2)$ es la normal exterior al contorno $\Gamma = \partial\,\Omega$, demuestre el teorema de la divergencia o teorema de Gauss

$$\int_\Omega \nabla \cdot v\, dx = \int_\Gamma v \cdot \hat{n}\, ds,$$

y la fórmula de Green

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w\, dx = \int_\Gamma v\, \partial_{\hat{n}}\, w\, ds - \int_\Omega v\, \Delta w\, dx.$$

5. Deduce las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible y no viscoso de densidad unitaria, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla\, p = f, \qquad \nabla \cdot u = 0,$$

aplicando la regla de la cadena a la ley de Newton que dice que la aceleración $du(x(t), t)/dt$, donde $x(t)$ es la trayectoria seguida por la partícula que satisface $dx/dt = u(x(t), t)$, es igual a la fuerza $-\nabla\, p + f$. Además, escribe la ecuación de Euler en componentes en $\mathbb{R}^2$.

6. Sea K un triángulo cuyos nodos son los puntos $a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}^2$, las funciones base nodales $\lambda_i \in \mathcal{P}^1(K)$, $i = 1, 2, 3$, son tales que

$$\lambda_i(a^j) = \delta_{ij},$$

es decir, la delta de Kronecker. Escribe explícitamente las fórmulas para las funciones λ_i.

7. Demuestra que si $v(x) \in \mathcal{P}^2(K)$, donde K es un triángulo definido por los nodos $a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}^2$, entonces v se puede factorizar como
$$v(x) = \lambda_1(x)\,\lambda_2(x)\,v_2,$$
donde v_2 es una constante y $\lambda_i(x) \in \mathcal{P}^1(K)$ con
$$\lambda_i(a^j) = \delta_{ij}.$$

8. Considere la triangulación uniforme de un cuadrado en triángulos "orientados hacia la derecha"(es decir, la diagonal derecha-izquierda del cuadrado está formada por aristas de triángulos). En dicha triangulación, construya las funciones base globales para el espacio de funciones cuadráticas a trozos continuos. Dibuje una función base de cada tipo y determine el número total de funciones base. Nota: la triangulación indicada tiene $2 \cdot 4^n$ triángulos.

9. Considere en Ω una *triangulación* utilizando rectángulos cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados. Cada rectángulo K tiene cuatro vértices $\{a^i, i = 1, 2, 3, 4\}$. Defina el espacio $\mathcal{Q}^i(K)$ de las funciones bilineales en K, es decir, $v \in \mathcal{Q}^i(K)$ es
$$v = c_0 + c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + c_{12}\,x_1\,x_2,$$
para $c_i \in \mathbb{R}$ constantes.
    a) Demuestre que una función en $\mathcal{Q}^i(K)$ viene determinada unívocamente por sus valores en los vértices $\{v(a^i)\}$.
    b) Muestra que es posible definir un espacio V_h de las funciones continuas tales que $v|_K \in \mathcal{Q}^i(K)$.
    c) Define una *triangulación* apropiada de Ω en rectángulos.
    d) Asumiendo que Ω y sus elementos K son cuadrados, describa las funciones base de $\mathcal{Q}^i(K)$ en los elementos K y las funciones base globales en V_h.

10. Demuestra que la fórmula de cuadratura (integración numérica) de los vértices en un triángulo K, es decir,
$$\int_K g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{3} g(a_K^j)\frac{|K|}{3},$$
donde $|K|$ es el área del triángulo, es de segundo orden.