Novena relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 11 de Enero de 1999

Elementos Finitos para Ecuaciones Elípticas y Parabólicas.

1. Calcule la serie de Fourier de la solución del problema $-\Delta u = 1$ en el cuadrado $(0,\pi) \times (0,\pi)$ con condiciones de Dirichlet homogéneas en los lados inferior ($y = 0$) y superior ($y = \pi$) del cuadrado, condiciones Neumann homogéneas en el lado izquierdo ($x = 0$) y condiciones de Robin homogéneas en el lado derecho ($x = \pi$).

2. Desarrolle el método de elementos finitos cG(1) (polinomios lineales a trozos continuos) para la ecuación de Poisson con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en un cuadrado con una triangulación de tipo *union jack* (ver la Figura del libro de texto). Determine la matriz del sistema lineal que se obtiene.

3. Desarrolle el método de elementos finitos cG(2) (polinomios cuadráticos a trozos continuos) para la ecuación de Poisson con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en un cuadrado con una triangulación estándar (como la vista en clase). Determine la matriz del sistema lineal que se obtiene.

4. Resuelva la ecuación parabólica (del calor)

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{u}(x,t) - u''(x,t) = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < \pi, \end{array} \right.$$

mediante series de Fourier.

5. Resuelva mediante serie de Fourier la ecuación parabólica (del calor) del ejercicio anterior con condiciones de contorno mixtas

$$u(0,t) = 0 = u'(\pi,t), \qquad t > 0.$$

6. Demuestre que la solución de la ecuación del calor $\dot{u} - \Delta u = 0$, $u(0) = u_0$, satisface las siguientes estimaciones fuertes de estabilidad

$$\|u(T)\|^2 + 2\int_0^T (\nabla u, \nabla u)\,dt \le \|u_0\|^2,$$

$$\int_0^T t\,\|\dot{u}(T)\|^2\,dt = \int_0^T t\,\|\Delta u\|^2\,dt \le \frac{1}{4}\,\|u_0\|^2,$$

$$\|\dot{u}(T)\| = \|\Delta u(T)\| \le \frac{1}{\sqrt{2}\,T}\,\|u_0\|.$$

7. En el dominio $\Omega \times I$ donde Ω es triangulado mediante $\mathcal{T}_n = \{K\}$ con función malla h_n e I es dividido en subintervalos temporales $I_n = (t_{n-1}, t_n)$, definimos $S_n = \Omega \times I_n$ y el espacio de búsqueda $W_k^{(r)}$ como el espacio de funciones v tales que

$$W_k^{(r)} = \left\{ v(x,t) : v|_{S_n} \in W_{kn}^{(r)}, (x,t) \in \Omega \times I \right\},$$

$$v|_{S_n} \in W_{kn}^{(r)} = \left\{ v(x,t) : v(x,t) = \sum_{j=0}^{r} t^j\,\psi_j(x), \psi_j \in V_n, (x,t) \in S_n \right\},$$

donde $V_n = V_{h_n}$ es el espacio de polinomios lineales a trozos continuos que son nulos en $\Gamma = \partial\Omega$ asociado a $\mathcal{T}_n$. Defina un conjunto de funciones base de los espacios

a) $W_{kn}^{(0)}$,

b) $W_{kn}^{(1)}$.

8. Demuestre que la matriz del proyector L_2 en el espacio V_n del ejercicio anterior es la siguiente

$$(B_{n-1,n})_{ij} = (\varphi_{n,j}, \varphi_{n-1,i}), \qquad 1 \le i \le M_n, \quad 1 \le j \le M_{n-1},$$

$$B_{n-1,n} \in M_n \times M_{n-1},$$

donde $\{\varphi_{n,j}\}$ es una base nodal de V_n asociada con los M_n nodos interiores de $\mathcal{T}_n$ numerados de alguna manera, de forma que

$$U_n = \sum_{j=1}^{M_n} \xi_{n,j}\,\varphi_{n,j}.$$

En otras palabras, $B_{n-1,n}$ cumple con la condición

$$B_{n-1,n}\xi_{n-1} = B_n\,\hat{\xi}_{n-1},$$

donde $\hat{\xi}_{n-1}$ son los coeficientes de P_nU_{n-1} con respecto a la base $\{\varphi_{n,j}\}$.

9. *a*) Desarrolle en detalle el método de elementos finitos cG(1)dG(0) visto en clase para la ecuación del calor $\dot{u} - \Delta u = 0$ con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas.

   b) Escriba la matriz del sistema lineal para los coeficientes de U_n en el caso de una malla uniforme.

   c) Calcule $B_{n-1,n}$ explícitamente en el caso de que $\mathcal{T}_n$ se obtiene dividiendo cada intervalo de $\mathcal{T}_{n-1}$ en dos sub-intervalos.

   d) Calcule $B_{n-1,n}$ explícitamente en el caso de que $\mathcal{T}_n$ tiene un número par de elementos que se obtienen uniendo cada dos intervalos consecutivos de $\mathcal{T}_{n-1}$.

10. Desarrolle en detalle el método de elementos finitos cG(1)dG(1) para la ecuación del calor $\dot{u} - \Delta u = 0$ con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas (recuerde cG(1) en espacio y dG(1) en tiempo). Incluya los detalles de la construcción del sistema de ecuaciones lineales asociado a dicho problema.

11. Desarrolle en detalle el método de elementos finitos cG(1)dG(0) para la ecuación parabólica $\dot{u} - \Delta u + u = f$ con condiciones de contorno Neumann homogéneas. Incluya los detalles de la construcción del sistema de ecuaciones lineales asociado a dicho problema.