Primera relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro — 25 de Octubre de 1999

Ejercicios de Repaso de Cálculo.

1. **Secuencias de Cauchy**. Demuestra que una sucesión de números reales convergente es una sucesión de Cauchy.

2. **Unicidad del límite**. Demuestra que una sucesión convergente tiene un único límite.

3. **Sobre límites**.

   a) Calcula, si es posible, los siguientes límites: $lim_{x\to 0}\sin(x)$ y $lim_{x\to 0}\sin(1/x)$.

   b) Escribe la definición de $lim_{x\to x_0}u(x) = \infty$.

   c) Calcula $lim_{x\to 0}1/x^2$.

4. **Continuidad uniforme**. Prueba que $f(x) = 1/x$ es continua pero no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

5. **Secuencias de funciones continuas**. Prueba que para cualquier $0 < a < 1$ la sucesión $\{x^i\}$ converge uniformemente a 0 en $[0, a]$, pero no para $a = 1$.

6. **Convergencia uniforme**. Sea f_i una sucesión de Cauchy uniforme de funciones uniformemente continuas en un intervalo cerrado y acotado I. Prueba que el límite es uniformemente continuo.

7. **Teorema del valor medio**. Enuncia y demuestra el teorema del valor medio. Ayuda: comienza demostrando el teorema de Rolle (cuando la función en los extremos es nula).

8. **Regla de la cadena**. Demuestra la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}u(v(x)) = u'(v(x))\,v'(x),$$

   asumiendo que u' es continua en $v(x)$ y v es diferenciable en x. Ayuda: usa el teorema del valor medio.

9. **Teorema del punto fijo**. Sea $u(x)$ una función diferenciable definida en los reales. Considera la sucesión $\{\xi_j\}$ generada por $\xi_j = u(\xi_{j-1})$, donde ξ_0 es un dato. Supone que hay una constante $0 < \theta < 1$ tal que $|u'(x)| \leq \theta$ para $x \in \mathbb{R}$. Prueba que $\{\xi_j\}$ es una sucesión de Cauchy que converge a $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi = u(\xi)$, donde llamaremos a ξ un punto fijo de u. Aplica este teorema a la función $u(x) = x/2 + 1/x$.

10. **Cero de una función**. Sea $u(x)$ una función continua definida en $\mathbb{R}$. Considera la sucesión $\{\xi_j\}$ generada por $\xi_j = \xi_{j-1} - \alpha\, u(\xi_{j-1})$, donde ξ_0 es un dato y α es una constante. Determina condiciones que garanticen que $\{\xi_j\}$ converge a $\xi \in \mathbb{R}$ que satisface $u(\xi) = 0$.

11. **Ecuación diferencial**. Resuelve $u'(x) = \sin(x), x > \frac{\pi}{4}, u(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}$.

12. **Integración por partes**. Demuestra que si u y v son dos funciones diferenciables para $a \leq x \leq b$ y x_0 y x_1 son puntos en $[a, b]$, entonces
$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x)\, v(x)\, dx = u(x_1)\, v(x_1) - u(x_0)\, v(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v'(x)\, dx.$$
Ayuda: aplica el Teorema Fundamental del Cálculo al producto $u\, v$.

13. **Acotación de integrales**. Demuestra que si f_1 y f_2 son funciones y $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $a \leq x \leq b$ y x_0 y x_1 son puntos en $[a, b]$ con $x_0 < x_1$, entonces
$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx \leq \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\, dx.$$
Utiliza este teorema para probar que $|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx| \leq \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|\, dx$ si $x_0 < x_1$.

14. **Teorema de Taylor**. Enuncia y demuestra el teorema (del resto) de Taylor. Ayuda: integra sucesivamente por partes usando la notación $k_n(x) = (x - z)^n / n!$ como sigue
$$\begin{aligned} u(z) &= u(y) + \int_y^z Du(x)\, Dk_1(x)\, dx \\ &= u(y) + Du(y)\,(z - y) - \int_y^z D^2u(x)\, Dk_2(x)\, dx, \end{aligned}$$
donde en la última integral se ha usado $Dk_2 = k_1$. Continuando de esta manera, se demuestra el teorema usando un corolario del teorema del valor medio.