Segunda relación de problemas | Métodos Matemáticos y Técn. Comp.
Profesor Francisco R. Villatoro | 27 de Octubre de 1999

Ejercicios de repaso de álgebra y espacios vectoriales de polinomios.

1. Demuestra que las normas l_1 y l_∞ de un vector $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top$ definidas como
$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_d|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le d} |x_i|,$$
respectivamente, son realmente normas.

2. Representa el círculo (bola) unidad $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \le 1\}$ para las tres normas $\| \cdot \|$, con $p = 1, 2, \infty$.

3. Demuestra que si $a_1, \ldots, a_d$, son números (pesos) positivos, entonces $(x, y) = \sum_{i=1}^d a_i\, x_i\, y_i$ es un producto escalar (interior) en $\mathbb{R}^d$. Escribe la norma asociada a este producto escalar y la desigualdad de Cauchy-Schwarz
$$|(x, y)| \le \|x\|\, \|y\|.$$
Demuestra que la norma asociada a un producto escalar cumple la desigualdad triangular ($\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$).

4. Demuestra que si A es simétrica y $\{\lambda_i\}$ son sus autovalores, entonces $\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$. Además, para cualquier matriz A, se tiene que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$, donde $\rho(A^\top A)$ es el radio espectral del producto $A^\top A$, es decir, su autovalor más grande.

5. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz
$$|(f, g)| \le \|f\|_{L_2(a,b)}\, \|g\|_{L_2(a,b)},$$
donde la norma $L_2(a, b)$ se define como
$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

6. Demuestra que $sin(n\, x)$ y $sin(m\, x)$ son ortogonales en $(0, \pi)$ si $n, m = 1, 2, 3, \ldots, n \ne m$.

7. El espacio vectorial de los polinomios en (a,b) de grado menor o igual que q, denotado $\mathcal{P}^q(a,b)$ tiene como base canónica $\{x^i\}_{i=0}^q$. Encuentre los coeficientes de un polinomio $p(x) \in \mathcal{P}^q(a,b)$ con respecto a su otra base $\{(x-c)^i\}_{i=0}^q$ donde $c \in (a,b)$.

8. Demuestre que especificar $p(a), p'(a), p(b)$, y $p'(b)$ es suficiente para especificar unívocamente cualquier polinomio $\mathcal{P}^3(a,b)$. Determine una base nodal, para estos valores, es decir, una base $\{\psi_i(x)\}_1^4$ tal que

$$p(x) = p(a)\,\psi_1(x) + p'(a)\,\psi_2(x) + p(b)\,\psi_3(x) + p'(b)\,\psi_4(x), \quad \forall p \in \mathcal{P}^3(a,b).$$

9. Escribe el polinomio de grado 3 (p_3) que interpola $\sin x$ en $\xi_0 = 0, \xi_1 = \pi/6, \xi_2 = \pi/4$, y $\xi_3 = \pi/3$. Dibuja (p.ej. con Matlab) las gráficas de $p_3(x)$ y $\sin x$ en $[0, \pi/2]$.

10. Escribe una base para el espacio vectorial de los polinomios a trozos de orden dos $W_h^{(2)}$ en (a,b) para un malla $\mathcal{T}_h$ dada. Dibuje tres de las funciones base. Escribe una base nodal $\{\varphi_i\}_{i=0}^{q+2}$ para el espacio de polinomios cuadráticos a trozos continuos $V_h^{(2)}$ en una malla $\mathcal{T}_h$ dada. Dibuja dos de las funciones base.

11. Sea f una función periódica de periodo 2π, continua y con derivada continua, excepto en un número finito de puntos en su periodo, entonces $f(x)$ se puede representar mediante la siguiente serie de Fourier (Teorema de Dirichlet)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)),$$

donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n se definen como

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\, f(x)\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\, f(x)\, dx.$$

Demuestre que si f tiene derivadas (periódicas) continuas de orden q, entonces existe una constante C tal que

$$|a_n| + |b_n| \le C\, n^{-q}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$