Tercera relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.

Profesor Francisco R. Villatoro — 27 de Octubre de 1999

Ejercicios de repaso de ecuaciones diferenciales parabólicas.

1. Demuestra que la solución del problema de valores iniciales o de Cauchy de la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = f(x),$$

se puede escribir como

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} \frac{y^n}{n!}.$$

Además, evalúa dicha serie para $f = \cos x$ y $f = \sin x$. Ayuda: Desarrolla $u(x,y)$ en serie de Taylor en y y sustituye.

2. Demuestra que la solución de la ecuación de difusión en línea finita con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, sea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \forall x \in (0,l), \quad \forall t > 0,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = g(x), \quad \forall x \in (0,l),$$

se puede escribir como

$$u(x,t) = \int_0^l g(y)\, G(x,y,a^2 t)\, dy,$$

donde la función de Green G se define como

$$G(x,y,a^2 t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{l}.$$

Ayuda: determina la solución por separación de variables y luego escribela de la forma mostrada. Es más fácil de lo que parece.

3. Resuelve el problema anterior con condiciones de contorno Neumann homogénea en $x = l$ y Dirichlet homogénea en $x = 0$.

4. Determina la solución de la ecuación de difusión bi-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \Omega \equiv (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$
$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad \forall y \in (0,1), \quad t > 0,$$
$$u'(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \quad \forall x \in (0,1), \quad t > 0,$$
$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Ayuda: Utiliza separación de variables, primero en espacio y tiempo, y luego para las dos variables espaciales. El resultado final será en series de Fourier bi-dimensionales.

5. Demuestra, en detalle, que la solución de la ecuación parabólica

$$\dot{u}(t) + A u(t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0, \tag{1}$$

donde A es un operador lineal, simétrico, semi-definido positivo, cumple la acotación de estabilidad fuerte

$$\|Au(T)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\,T}\|u_0\|.$$

6. Asumiendo que existe una constante $a > 0$ tal que A es estrictamente definido positivo, $\langle Av, v\rangle \geq a\|v\|^2$, $\forall v$, demuestra que la solución de

$$\dot{u}(t) + A u(t) = f, \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0, \tag{2}$$

cumple

$$\|u(T)\|^2 + a\int_0^T \|u(t)\|^2\,dt \leq \|u(0)\|^2 + \frac{1}{a}\int_0^T \|f\|^2\,dt.$$

Ayuda: use y demuestre que $|\langle v, w\rangle| \leq (4\,\epsilon)^{-1}\|v\|^2 + \epsilon\|w\|^2$, $\forall \epsilon > 0$.

7. Resuelva el problema de valores iniciales para la ecuación de difusión uni-dimensional con codiciones iniciales

$$(a) \quad f_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases},$$

$$(b) \quad f_b(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x < 1, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}.$$